Trasformazione di Laplace

Nota: Una trattazione elementare ma più ampia della Trasformazione di Laplace è offerta ad esempio dal primo capitolo di

M. Marini: *Metodi matematici per lo studio delle reti elettriche.* C.E.D.A.M., Padova, 1999.

La presente trattazione è basata in parte sul testo

G. Gilardi: *Analisi tre.* McGraw-Hill, Milano 1994.

1 Trasformazione di Laplace di Funzioni

Questa trasformazione è strettamente legata a quella di Fourier, ed essa pure permette di trasformare equazioni differenziali alle derivate ordinarie in equazioni algebriche. Tuttavia la trasformazione di Laplace è particolarmente indicata per lo studio dei problemi differenziali ai valori iniziali, a differenza di quella di Fourier che è adatta a problemi posti su tutta la retta reale (ricordiamo che invece la serie di Fourier si presta allo studio di problemi su un intervallo). In ambito applicativo questa teoria è anche denominata *calcolo simbolico,* o anche *calcolo operazionale.*

Da Fourier a Laplace. Preliminarmente esponiamo alcune considerazioni prescindendo dalla regolarità delle funzioni coinvolte. Denotiamo con $\widehat{u}$ la trasformata di Fourier di una funzione $u : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ trasformabile:

$$\widehat{u}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} u(t) e^{-i\xi t}\, dt \qquad \text{per } \xi \in \mathbf{R}. \tag{1.1}$$

Uno degli elementi di maggior interesse di questa trasformazione sta nella formula inversa

$$u(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \widehat{u}(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi \qquad \text{per } t \in \mathbf{R}, \tag{1.2}$$

che rappresenta u come una media (integrale) con *peso* $\widehat{u}(\xi)$ delle funzioni periodiche $w_\xi : \mathbf{R} \to \mathbf{C} : t \mapsto e^{i\xi t}$ parametrizzate da $\xi \in \mathbf{R}$. Ciascuna di queste ultime funzioni è detta un'*armonica* di frequenza ξ, [1] in quanto risolve l'equazione del moto armonico: [2]

$$w''(t) + \xi^2 w(t) = 0 \qquad \text{per } t \in \mathbf{R}. \tag{1.3}$$

Per via del classico metodo di *variazione delle costanti,* l'uso della trasformazione di Fourier ben si presta allo studio di equazioni non omogene della forma $w''(t) + cw(t) = f(t)$ per $t \in \mathbf{R}$, per una data costante $c > 0$ ed una data funzione f.

Poiché $|w_\xi(t)| \leq 1$ per ogni $\xi, t \in \mathbf{R}$, per la convergenza dell'integrale di Fourier (1.2) basta $u \in L^1$. Comunque abbiamo visto come si possa anche assumere $u \in L^2$, pur di intendere l'integrale nel senso del valore principale di Cauchy; in effetti il dominio di questa trasformazione può anche essere esteso ulteriormente.

Per ogni $\eta \in \mathbf{R}$, consideriamo ora un'altra semplice equazione differenziale di notevole interesse:

$$w'(t) + \eta w(t) = 0 \qquad \text{per } t \in \mathbf{R}. \tag{1.4}$$

[1] ξ rappresenta la *frequenza angolare* o *pulsazione,* ovvero il rapporto radianti/tempo. Questa è soltanto proporzionale alla frequenza, ovvero al rapporto cicli/tempo.

[2] Malgrado la (1.3), le funzioni w_ξ non possono essere considerate come autofunzioni della derivata seconda né a L^1 né a L^2, in quanto non appartengono a tali spazi.

Le soluzioni di questa equazione sono proporzionali a $w_\eta : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : t \mapsto e^{-\eta t}$, che ha crescita esponenziale a $\pm\infty$, secondo il segno di η (se $\eta \neq 0$). Analogamente alla (1.3), l'equazione (1.4) è omogenea, ma anche qui il classico metodo di variazione delle costanti permette di costruire una soluzione per corrispondenti equazioni non omogenee $w'(t) + \eta w(t) = f(t)$. [3]

In analogia con la (1.1), per lo studio dell'equazione $w'(t) + \eta w(t) = f(t)$ incominciamo col porre

$$\widetilde{u}(\eta) := \int_{\mathbf{R}} u(t) e^{-\eta t}\, dt \qquad \text{per } \eta \in \mathbf{R}. \tag{1.5}$$

Per $\eta > 0$ ($\eta < 0$, rispett.) la convergenza di questo integrale richiede che $|u(t)|$ decresca esponenzialmente a 0 per $t \to -\infty$ (per $t \to +\infty$, rispett.). Comunque in diverse situazioni di interesse applicativo l'equazione (1.4) non è posta su tutto $\mathbf{R}$, ma solo per $t > 0$; in tal caso conviene supporre che il segnale $u(t)$ sia *causale,* ovvero nullo per ogni $t < 0$.

Più generalmente, si può sostituire la variabile reale η con una variabile complessa s, in considerazione del fatto che $|e^{-st}| = e^{-\operatorname{Re}(s)t}$. Si possono quindi considerare le funzioni $\mathbf{R} \to \mathbf{C} : t \mapsto e^{-st}$ (il tempo resta reale!), parametrizzate da $s \in \mathbf{C}$. Per s immaginario riotteniamo le funzioni periodiche, mentre per s reale queste funzioni hanno crescita o decrescita esponenziale. [4] Definiamo quindi la trasformazione di Laplace

$$u \mapsto \widetilde{u}(s) := \int_{\mathbf{R}} u(t) e^{-st}\, dt \qquad \text{per } s \in \mathbf{C}, \tag{1.6}$$

che include (1.5) per s reale, ed anche la trasformazione di Fourier per s immaginario (a meno del fattore convenzionale $1/\sqrt{2\pi}$). Per quanto riguarda la convergenza di questo integrale, vale quanto detto per la (1.5); in particolare risulta conveniente limitare l'analisi ai segnali causali.

La variabile s è pensata come frequenza (complessa). Ponendo $s = x + iy$, abbiamo

$$U_x(y) := \widetilde{u}(x + iy) = \int_{\mathbf{R}} u(t) e^{-xt} e^{-iyt}\, dt \qquad \text{per } x, y \in \mathbf{R}. \tag{1.7}$$

Poiché U_x è la trasformata di Fourier della funzione $t \mapsto \sqrt{2\pi}\, u(t) e^{-xt}$, la (1.6) può essere interpretata come una schiera di trasformazioni di Fourier, parametrizzate da $x \in \mathbf{R}$.

Per dar senso alla (1.7) basta che $x \in \mathbf{R}$ sia tale che $e^{-xt} u(t) \in L^1$; per u causale, ciò è tanto meno restrittivo quanto più x è grande. Questo permette di applicare questa formulazione della trasformazione di Laplace ad una vasta famiglia di funzioni causali di L^1_{loc}. [5]

Quadro Funzionale. Sulla base delle considerazioni precedenti, definiamo la classe delle *funzioni trasformabili* $D_{\mathcal{L}}$, e per ogni $u \in D_{\mathcal{L}}$ l'*ascissa di convergenza (assoluta)* $\lambda(u)$, il *semipiano di convergenza*

[3] Malgrado la (1.4), le funzioni w_η non possono essere considerate come autofunzioni della derivata prima né in L^1 né in L^2, in quanto non appartengono a tale spazio.

[4] Pure le funzioni $\widetilde{u}(\eta)$ non possono essere considerate come autofunzioni della derivata prima nemmeno in $\mathcal{S}'$, in quanto non appartengono a tale spazio.

[5] Questo toglie interesse all'estensione della trasformazione ad L^2.

$\mathbf{C}_{\lambda(u)}$, e la *trasformata di Laplace* $\mathcal{L}(u)$: [6] [7]

$$D_{\mathcal{L}} := \left\{u \in L^1_{loc} : u(t) = 0 \;\; q\forall t < 0, \exists x \in \mathbf{R} : e^{-xt}u(t) \in L^1_t\right\}, \tag{1.8}$$

$$\lambda(u) := \inf\left\{x \in \mathbf{R} : e^{-xt}u(t) \in L^1_t\right\} \; (\in [-\infty, +\infty[) \qquad \forall u \in D_{\mathcal{L}}, \tag{1.9}$$

$$\mathbf{C}_{\lambda(u)} := \{s \in \mathbf{C} : \; \mathrm{Re}(s) > \lambda(u)\} \qquad \forall u \in D_{\mathcal{L}}, \tag{1.10}$$

$$[\mathcal{L}(u)](s) := \int_{\mathbf{R}} e^{-st}u(t)\, dt \qquad \forall s \in \mathbf{C}_{\lambda(u)}, \forall u \in D_{\mathcal{L}}. \tag{1.11}$$

$D_{\mathcal{L}}$, ovvero l'insieme dei segnali causali u localmente integrabili a crescita al più esponenziale, è uno spazio vettoriale. La trasformazione di Laplace è ovviamente lineare: per ogni $u, v \in D_{\mathcal{L}}$ ed ogni $\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{C}$,

$$\lambda(\mu_1 u + \mu_2 v) \leq \max\{\lambda(u), \lambda(v)\}, \quad \mathcal{L}(\mu_1 u + \mu_2 v) = \mu_1 \mathcal{L}(u) + \mu_2 \mathcal{L}(v). \tag{1.12}$$

L'*integrale di Laplace* (1.11) è inteso nel senso di Lebesgue, quindi è assolutamente convergente. Questo integrale converge per ogni s tale che $\mathrm{Re}(s) > \lambda(u)$. Per certe funzioni questo può valere anche per $\mathrm{Re}(s) = \lambda(u)$; nondimeno abbiamo definito la funzione trasformata solo per $\mathrm{Re}(s) > \lambda(u)$, poiché certe proprietà possono venire meno per $\mathrm{Re}(s) = \lambda(u)$. Tra l'altro non è escluso che l'integrale possa convergere per qualche s tale che $\mathrm{Re}(s) < \lambda(u)$; comunque per tali valori di s esso non rappresenta l'integrale di Laplace.

Anche se $\mathbf{C}_{\lambda(u)}$ è denominato *semipiano* di convergenza, non è escluso che possa essere $\mathbf{C}_{\lambda(u)} = \mathbf{C}$, ovvero $\lambda(u) = -\infty$; questo il caso ad esempio se u ha supporto compatto. Il caso di $\mathbf{C}_{\lambda(u)} = \emptyset$, ovvero $\lambda(u) = +\infty$, è invece escluso per ogni $u \in D_{\mathcal{L}}$.

Nella definizione delle funzioni di $D_{\mathcal{L}}$ ricorrerà la *funzione di Heaviside* H (detta anche *gradino unitario):*

$$H(t) := 0 \qquad \forall t \leq 0, \qquad H(t) := 1 \qquad \forall t > 0.$$

L'uso del fattore $H(t)$ garantirà la causalità. Ad esempio si verifica facilmente che

$$\begin{aligned} &H(t) \in D_{\mathcal{L}}, \quad \lambda(H) = 0, \\ &\forall \alpha \in \mathbf{R}, \qquad t^\alpha H(t) \in D_{\mathcal{L}}, \; \lambda(t^n H(t)) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha > -1; \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\forall u \in D_{\mathcal{L}}, \text{ se } u \text{ ha supporto limitato allora } \lambda(u) = -\infty;$$

$$e^{-t^2}H(t) \in D_{\mathcal{L}}, \quad \lambda(e^{-t^2}H(t)) = -\infty; \qquad e^{t^2}H(t), t^{-1}H(t) \notin D_{\mathcal{L}}.$$

Il prossimo risultato evidenzia il legame precedentemente discusso tra la trasformazione di Fourier (in L^1) e quella di Laplace.

---

[6] La classe delle funzioni trasformabili qui definita è più ampia di quella introdotta nel testo di Marini, poiché fa riferimento alle funzioni definite quasi ovunque ed all'integrale di Lebesgue.

Scriviamo L^1_t per evidenziare che t è la variabile di integrazione.

Qui si parla di ascissa di convergenza *assoluta,* poiché (come noto) l'integrale di Lebesgue è assolutamente convergente.

[7] Quella qui introdotta è anche detta trasformazione di Laplace *unilatera,* dal momento che la restrizione a funzioni u causali comporta che l'insieme di convergenza consista in un semipiano. In letteratura si definisce anche una trasformazione di Laplace *bilatera,* per cui non si richiede che u sia causale; in tal caso l'insieme di convergenza è una striscia (eventualmente un semipiano o l'intero piano complesso) della forma $\{s \in \mathbf{C} : \lambda_1(u) < \mathrm{Re}(s) < \lambda_2(u)\}$, per opportuni $\lambda_1(u)$ e $\lambda_2(u)$ reali tali che $-\infty \leq \lambda_1(u) < \lambda_2(u) \leq +\infty$. (L'esistenza di tali $\lambda_1(u), \lambda_2(u)$ è una restrizione sulle funzioni trasformabili.) Questa trasformazione bilatera è di uso meno frequente di quella unilatera. Alcuni autori poi definiscono trasformazione di Laplace definendo l'integrale in senso improprio quindi senza richiederne l'assoluta convergenza (come si vedrà per le distribuzioni).

Proposizione 1.1. *Per ogni $u \in D_{\mathcal{L}}$,*

$$e^{-xt}u(t) \in L^1_t, \quad [\mathcal{L}(u)](x+iy) = \sqrt{2\pi}\big[\mathcal{F}(e^{-xt}u(t))\big](y) \qquad \forall y \in \mathbf{R}, \forall x > \lambda(u). \tag{1.14}$$

Viceversa, per ogni $u \in L^1$, $u \in D_{\mathcal{L}}$ e $\lambda(u) \leq 0$. Se $\lambda(u) < 0$ allora [8]

$$[\mathcal{F}(u)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\mathcal{L}(u)](iy) \qquad \forall y \in \mathbf{R}. \tag{1.15}$$

Questo risultato permette di estendere diverse proprietà dalla trasformazione di Fourier a quella di Laplace.

Proposizione 1.2. *Per ogni $u \in D_{\mathcal{L}}$,*

$$v(t) = u(t-t_0) \quad \Rightarrow \quad \lambda(v) = \lambda(u), \quad \widetilde{v}(s) = e^{-t_0 s}\,\widetilde{u}(s) \qquad \forall t_0 > 0, \tag{1.16}$$

$$v(t) = e^{s_0 t}u(t) \quad \Rightarrow \quad \lambda(v) = \lambda(u) + \mathrm{Re}(s_0), \quad \widetilde{v}(s) = \widetilde{u}(s-s_0) \qquad \forall s_0 \in \mathbf{C}, \tag{1.17}$$

$$v(t) = u(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \lambda(v) = \omega\lambda(u), \quad \widetilde{v}(s) = \tfrac{1}{\omega}\widetilde{u}\Big(\tfrac{s}{\omega}\Big) \qquad \forall \omega > 0. \tag{1.18}$$

Le affermazioni circa le ascisse di convergenza possono essere facilmente controllate: il ritardo non altera il comportamento della funzione per $t \to +\infty$; il fattore esponenziale $e^{s_0 t}$ comporta una traslazione dell'ascissa di convergenza; il cambiamento della scala dei tempi si riflette in un'analoga trasformazione per l'ascissa di convergenza.

Esempi. Per ogni $u \in D_{\mathcal{L}}$,

$$u(t) = H(t) \quad \Rightarrow \quad \lambda(u) = 0, \quad \widetilde{u}(s) = \frac{1}{s}\,, \tag{1.19}$$

$$u(t) = e^{\gamma t}H(t)\ (\gamma \in \mathbf{C}) \quad \Rightarrow \quad \lambda(u) = \mathrm{Re}(\gamma), \quad \widetilde{u}(s) = \frac{1}{s-\gamma}\,, \tag{1.20}$$

$$u(t) = \cos(\omega t)H(t)\ (\omega \in \mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad \lambda(u) = 0, \quad \widetilde{u}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}\,, \tag{1.21}$$

$$u(t) = \sin(\omega t)H(t)\ (\omega \in \mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad \lambda(u) = 0, \quad \widetilde{u}(s) = \frac{w}{s^2+\omega^2}\,, \tag{1.22}$$

$$u(t) = \cosh(\omega t)H(t)\ (\omega \in \mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad \lambda(u) = |\omega|, \quad \widetilde{u}(s) = \frac{s}{s^2-\omega^2}\,, \tag{1.23}$$

$$u(t) = \sinh(\omega t)H(t)\ (\omega \in \mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad \lambda(u) = |\omega|, \quad \widetilde{u}(s) = \frac{w}{s^2-\omega^2}\,, \tag{1.24}$$

$$u(t) = t^k H(t)\ (k \in \mathbf{N}) \quad \Rightarrow \quad \lambda(u) = 0, \quad \widetilde{u}(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}\,. \tag{1.25}$$

La verifica è lasciata al lettore.

(Più in generale dell'ultima formula,

$$\forall a > -1, \qquad u(t) = t^a H(t) \quad \Rightarrow \quad \lambda(u) = 0, \quad \widetilde{u}(s) = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \tag{1.26}$$

poiché, ricordando la definizione della classica funzione Γ di Eulero,

$$\widetilde{u}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}t^a\,dt = \frac{1}{s^{a+1}}\int_0^{+\infty} e^{-y}y^a\,dy =: \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} \qquad \forall s \in \mathbf{C}_{\lambda(u)}.)$$

[8] Il caso di $\lambda(u) = 0$ è un po' delicato: per $y \in \mathbf{R}$ $[\mathcal{F}(u)](y)$ ovviamente esiste avendo supposto $u \in L^1$; ma, come abbiamo già osservato, non è lecito scrivere $[\mathcal{L}(u)](iy)$.

Incidentalmente, si noti che $1/s$ è definita per ogni $s \neq 0$, ma $\widetilde{H}(s) = 1/s$ solo se $\mathrm{Re}(s) > \lambda(H) = 0$.

Sulle funzioni periodiche la trasformazione di Laplace agisce in modo del tutto diverso dalla trasformazione di Fourier, come è mostrato dal seguente risultato. Si noti che, per via della causalità, si richiede che u sia restrizione di una funzione periodica solo per tempi positivi.

Proposizione 1.3. *(Funzioni Periodiche) Per ogni $T > 0$, sia $u \in D_{\mathcal{L}}$, $u \not\equiv 0$ e tale che $u(t+T) = u(t)$ per ogni $t > 0$. Allora $\lambda(u) = 0$ e, posto*

$$w(t) := u(t) \quad \forall t \in [0,T], \qquad w(t) := 0 \quad \forall t \in \mathbf{R} \setminus [0,T], \tag{1.27}$$

si ha

$$\widetilde{u}(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \widetilde{w}(s) \qquad \forall s \in \mathbf{C}_{\lambda(u)}. \tag{1.28}$$

Si noti che $1 - e^{-sT} \neq 0$ per ogni $s \in \mathbf{C}_{\lambda(u)} = \mathbf{C}_0$.

Incidentalmente, si noti anche che le ipotesi non implicano $u \in L^\infty(0,T)$, ma solo $w \in L^1(0,T)$.

Dimostrazione. Per ogni $x > 0$, cambiando la variabile di integrazione, utilizzando la periodicità e ponendo $C := \int_0^T |u(\tau)|\, d\tau$ ($\neq 0$ poiché $u \not\equiv 0$), abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} e^{-xt} |u(t)|\, dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-xt} |u(t)|\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTx} \int_0^T e^{-x\tau} |w(\tau)|\, d\tau \\ (\text{poiché } e^{-x\tau} \leq 1) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTx} \int_0^T |u(\tau)|\, d\tau = C \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTx} < +\infty. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Per contro, per ogni $x < 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} e^{-xt} |u(t)|\, dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-xt} |u(t)|\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTx} \int_0^T e^{-x\tau} |w(\tau)|\, d\tau \\ (\text{poiché } e^{-x\tau} \geq 1) &\geq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTx} \int_0^T |w(t)|\, dt = C \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTx} = +\infty. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Ne consegue che $\lambda(u) = 0$. Posto $u_T(t) := u(t - T)$ per ogni $t \in \mathbf{R}$, poiché $w = u - u_T$ per la (1.16) abbiamo

$$\widetilde{w}(s) = \widetilde{u}(s) - \widetilde{u_T}(s) = \widetilde{u}(s) - e^{-sT} \widetilde{u}(s) = (1 - e^{-sT}) \widetilde{u}(s) \qquad \forall s \in \mathbf{C}_{\lambda(u)},$$

ovvvero la (1.28). □

Proposizione 1.4. *(Teorema della Convoluzione) Per ogni $u, v \in D_{\mathcal{L}}$, $u * v \in D_{\mathcal{L}}$ e*

$$\lambda(u * v) \leq \max\{\lambda(u), \lambda(v)\}, \qquad \mathcal{L}(u * v) = \mathcal{L}(u)\, \mathcal{L}(v). \tag{1.31}$$

Più in generale per ogni intero $N \geq 2$ e per ogni $u_1, ..., u_N \in D_{\mathcal{L}}$, abbiamo $u_1 * ... * u_N \in D_{\mathcal{L}}$ e

$$\begin{aligned} &\lambda(u_1 * ... * u_N) \leq \max\{\lambda(u_i) : i = 1, ..., N\}, \\ &\mathcal{L}(u_1 * ... * u_N) = \mathcal{L}(u_1) \cdot ... \cdot \mathcal{L}(u_N). \end{aligned} \tag{1.32}$$

La seconda parte consegue facilmente dalla prima. La dimostrazione è analoga a quella vista per la trasformazione di Fourier, ed è qui omessa.

La disuguaglianza (1.31) può essere stretta: si consideri ad esempio il caso di $u \equiv 0$.

Corollario 1.5. *Per ogni $u \in D_{\mathcal{L}}$, $U(t) = \int_0^t u(\tau)\, d\tau \in D_{\mathcal{L}}$ e*

$$[\mathcal{L}(U)](s) = [\mathcal{L}(u)](s)/s \qquad \textit{per } \operatorname{Re}(s) > \max\{\lambda(u), 0\}. \tag{1.33}$$

Dimostrazione. Basta osservare che $\int_0^t u(\tau)\, d\tau = (u * H)(t)$, ed applicare il teorema della convoluzione. □

Proposizione 1.6. *(Analiticità) Per ogni $u \in D_{\mathcal{L}}$,*

$$\textit{la funzione } \widetilde{u} \textit{ è analitica in } \mathbf{C}_{\lambda(u)}, \tag{1.34}$$

$$\forall \lambda > \lambda(u), \ \textit{la funzione } \widetilde{u} \textit{ è limitata nel semipiano } \{s \in \mathbf{C} : \operatorname{Re}(s) \geq \lambda\}, \tag{1.35}$$

$$\sup_{\operatorname{Im}(s) \in \mathbf{R}} \widetilde{u}(s) \to 0 \qquad \textit{per } \operatorname{Re}(s) \to +\infty. \tag{1.36}$$

Quest'ultima proprietà significa che $\widetilde{u}(s) \to 0$ per $\operatorname{Re}(s) \to +\infty$, uniformemente rispetto a $\operatorname{Im}(s)$. La verifica è immediata, passando al limite nell'integrale grazie al teorema della convergenza dominata.

La dimostrazione dell'analiticità è analoga a quella vista per la trasformazione di Fourier.

La (1.35) non garantisce la limitatezza di $\widetilde{u}$ nell'intero semipiano $\mathbf{C}_{\lambda(u)}$. Ad esempio la funzione di Heaviside H ha ascissa di convergenza $\lambda(H) = 0$, e la sua trasformata $\widetilde{H}(s) = 1/s$ è illimitata in $\mathbf{C}_0$.

Osservazioni. (i) In certi casi $\widetilde{u}$ può essere estesa ad una funzione analitica definita in un dominio più ampio di $\mathbf{C}_{\lambda(u)}$. Ad esempio la trasformata $\widetilde{H}$ della funzione di Heaviside H è definita solo per $\operatorname{Re}(s) > \lambda(H) = 0$, tuttavia la funzione $f(s) := 1/s$ è analitica in $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Comunque, come abbiamo già osservato, per $\operatorname{Re}(s) < 0$ la funzione $f(s) := 1/s$ non è la trasformata di Laplace di alcuna funzione di $D_{\mathcal{L}}$.

(ii) Il teorema di analiticità segna una differenza fondamentale tra le trasformazioni di Laplace e di Fourier, poiché una funzione trasformata di Fourier non è necessariamente analitica. Ad esempio, la funzione $u : \mathbf{R} \to \mathbf{C} : \xi \mapsto (1 + \xi^2)^{-2}$ è un elemento di L^2, pertanto essa è la trasformata di Fourier di una funzione v. Tuttavia u non è estendibile ad alcuna funzione analitica $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, poiché $(1 + s^2)^{-2}$ non è definita per $s = \pm i$.

(iii) Il teorema di analiticità permette di sviluppare certi conti per s reale, e poi di estendere i risultati a tutto il semipiano di convergenza. □

Per la differenziazione della funzione di t e della sua trasformata di Laplace valgono regole analoghe a quelle viste per la trasformazione di Fourier. In una di queste formule compare il valore iniziale della funzione u; questo troverà una semplice spiegazione nell'ambito della trasformazione delle distribuzioni. Ricordiamo che per ogni funzione $v = v(t)$ denotiamo con Dv la derivata nel senso delle distribuzioni e con v' quella quasi ovunque (se esiste).

Proposizione 1.7. *(Trasformazione di Laplace e Derivazione q.o.) (i) Per ogni $u \in D_{\mathcal{L}}$,*

$$\begin{aligned} & tu(t) \in D_{\mathcal{L}}, \quad \lambda(tu(t)) = \lambda(u), \\ & [\mathcal{L}(u)]'(s) = -[\mathcal{L}(tu(t))](s) \qquad \forall s \in \mathbf{C}_{\lambda(u)}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

(ii) Per ogni $u \in D_{\mathcal{L}}$ assolutamente continua in $]0, +\infty[$, se $u' \in D_{\mathcal{L}}$ e se esiste

$$u(0^+) := \lim_{t \to 0^+} u(t) \in \mathbf{C},$$

allora

$$[\mathcal{L}(u')](s) = s[\mathcal{L}(u)](s) - u(0^+) \qquad \forall s \in \mathbf{C}_{\lambda(u)} \cap \mathbf{C}_{\lambda(u')}. \tag{1.38}$$

Dimostrazione. Per quanto visto la moltiplicazione per t non modifica l'ascissa di convergenza di u. La dimostrazione della formula $\mathcal{L}(u)' = -\mathcal{L}(tu(t))$ è simile a quella dell'analoga proprietà per la trasformazione di Fourier.

Per la verifica della (1.38), preliminarmente notiamo che, poiché $e^{-st}u(t) \in L^1_t$ per $\mathrm{Re}(s) > \lambda(u)$, esiste una successione divergente $\{t_n\}$ tale che $e^{-st_n}u(t_n) \to 0$ per $n \to +\infty$. Integrando per parti quindi abbiamo

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}(u')](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}u'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^{t_n} e^{-st}u'(t)\,dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big\{\int_0^{t_n} se^{-st}u(t)\,dt + e^{-st_n}u(t_n)\Big\} - u(0^+) \\ &= s\int_0^{+\infty} e^{-st}u(t)\,dt - u(0^+) \qquad \forall s \in \mathbf{C}_{\lambda(u)} \cap \mathbf{C}_{\lambda(u')}. \quad \square\end{aligned} \tag{1.39}$$

Osservazioni. (i) La condizione $u' \in D_{\mathcal{L}}$ non discende da $u \in D_{\mathcal{L}}$, nemmeno nel caso in cui u è assolutamente continua. Ad esempio sia $u_1(t) = t^{-1/2}H(t)$ che $u_2(t) = [\sin\exp(t^2)]H(t)$ sono elementi di $D_{\mathcal{L}}$, ma $u_i' \notin D_{\mathcal{L}}$ per $i = 1, 2$.

(ii) La derivabilità di u per quasi ogni t sarebbe un'ipotesi troppo debole per la (1.38), poiché consentirebbe ad u di presentare dei salti per $t > 0$, i quali come noto comportano la presenza di masse di Dirac nella derivata nel senso delle distribuzioni. Comunque più avanti estenderemo la trasformazione di Laplace alle distribuzioni.

La formula (1.38) è facilmente estesa a derivate di ordine superiore.

Proposizione 1.8. *Sia $u \in D_{\mathcal{L}}$, siano u e u' assolutamente continue in $]0, +\infty[$, e siano $u', u'' \in D_{\mathcal{L}}$. Inoltre esistano $u(0^+), u'(0^+)$ in $\mathbf{C}$. Allora*

$$[\mathcal{L}(u'')](s) = s^2[\mathcal{L}(u)](s) - su(0^+) - u'(0^+) \qquad \forall s \in \mathbf{C}_{\lambda(u)} \cap \mathbf{C}_{\lambda(u')} \cap \mathbf{C}_{\lambda(u'')}. \tag{1.40}$$

Dimostrazione. Applicando la Proposizione 1.7 prima a u' e poi a u abbiamo

$$[\mathcal{L}(u'')](s) = s[\mathcal{L}(u')](s) - u'(0^+) = s^2[\mathcal{L}(u)](s) - su(0^+) - u'(0^+)$$

per ogni $s \in \mathbf{C}_{\lambda(u)} \cap \mathbf{C}_{\lambda(u')} \cap \mathbf{C}_{\lambda(u'')}$. $\square$

Più in generale, applicando reiteratamente la formula (1.38), si ottiene il seguente risultato.

Proposizione 1.9. *Sia m un intero > 1, sia $u \in D_{\mathcal{L}}$, siano $u, u', ..., u^{(m-1)}$ assolutamente continue in $]0, +\infty[$, e siano $u', ..., u^{(m)} \in D_{\mathcal{L}}$. Inoltre esistano $u(0^+), ..., u^{(m-1)}(0^+) \in \mathbf{C}$. Allora*

$$[\mathcal{L}(u^{(m)})](s) = s^m[\mathcal{L}(u)](s) - \sum_{n=0}^{m-1} s^{m-n-1}u^{(n)}(0^+) \qquad \forall s \in \mathbf{C}_{\lambda(u)} \cap ... \cap \mathbf{C}_{\lambda(u^{(m)})}.$$

Proposizione 1.10. *(Trasformazione di Laplace ed Integrazione) (i) Per ogni $u \in D_{\mathcal{L}}$,*

$$\begin{aligned}&\int_0^t u(\tau)d\tau \in D_{\mathcal{L}}, \qquad \lambda\Big(\int_0^t u(\tau)d\tau\Big) = \lambda(u), \\ &\Big[\mathcal{L}\Big(\int_0^t u(\tau)d\tau\Big)\Big](s) = \frac{\mathcal{L}(u)(s)}{s} \qquad \text{in } \mathbf{C}_{\lambda(u)} \setminus \{0\}.\end{aligned} \tag{1.41}$$

(ii) Se $u, u(t)/t \in D_{\mathcal{L}}$ *allora* $\lambda(u(t)/t) = \lambda(u)$ *e* [9]

$$[\mathcal{L}(u(t)/t)](s) = \lim_{\mathbf{R}\ni\sigma\to+\infty} \int_{\mathrm{Re}(s)}^{\sigma} [\mathcal{L}(u)](r)\, dr \qquad \forall s \in \mathbf{C}_{\lambda(u)}. \tag{1.42}$$

Questo limite coincide con l'integrale generalizzato di $\mathcal{L}(u)$ tra 0 e $+\infty$. Tuttavia questo integrale potrebbe non convergere assolutamente, e quindi non essere rappresentabile come un integrale di Lebesgue. [10]

Dimostrazione. Poiché $\int_0^t u(\tau)d\tau = (u*H)(t)$, per il Teorema della Convoluzione

$$\Big[\mathcal{L}\Big(\int_0^t u(\tau)d\tau\Big)\Big](s) = \widetilde{u}(s)\widetilde{H}(s) = \frac{\widetilde{u}(s)}{s} \qquad \forall s \neq 0 \text{ tale che } \mathrm{Re}(s) > \lambda(u).$$

Se d'altra parte $u, u(t)/t \in D_{\mathcal{L}}$ allora applicando il teorema della derivazione a $v(t) := u(t)/t$ abbiamo

$$\lambda(u(t)/t) = \lambda(u), \qquad \mathcal{L}(v)' = -\mathcal{L}(tv(t)) = -\mathcal{L}(u),$$

da cui integrando

$$\widetilde{v}(s) = \widetilde{v}(\sigma) + \int_{\mathrm{Re}(s)}^{\sigma} [\mathcal{L}(u)](r)\, dr \qquad \forall s \in \mathbf{C}_{\lambda(u)}, \forall \sigma > \lambda(u).$$

Passando al limite per $\sigma \to +\infty$ e ricordando la (1.36) si ottiene la (1.42). $\square$

I due risultati seguenti sono esempi della classe dei cosiddetti *teoremi tauberiani,* i quali forniscono informazioni sulla funzione u in termini della trasformata $\widetilde{u}$. (I teoremi che viceversa forniscono informazioni per $\widetilde{u}$ in termini di u sono detti *abeliani.)*

Teorema 1.11. *(del Valore Finale e del Valore Iniziale) Per ogni* $u \in D_{\mathcal{L}}$, [11]

$$\exists u(+\infty) \in \mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \lambda(u) \le 0, \quad s\widetilde{u}(s) \to u(+\infty) \text{ per } s \to 0, \tag{1.43}$$

$$\exists u(0^+) \in \mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \sup_{\mathrm{Im}(s)\in\mathbf{R}} |s\widetilde{u}(s) - u(0^+)| \to 0 \text{ per } \mathrm{Re}(s) \to +\infty. \tag{1.44}$$

(Se $\lambda(u) = 0$ allora nella (1.43) si intende che $s \to 0$ dal semipiano dei complessi con parte reale positiva.)

Dimostrazione. Questa è particolarmente semplice se si assume che

$$u \text{ è assolutamente continua}, \quad u' \in D_{\mathcal{L}}, \quad \exists u(+\infty), \quad \exists u(0^+) \tag{1.45}$$

(per ipotesi almeno uno di questi due limiti è finito). Assumiamo quindi entrambe queste condizioni.

Poiché la funzione $u(t)$ è continua e converge per $t \to +\infty$, u è limitata e quindi $\lambda(u) \le 0$.

Grazie al Teorema di Lebesgue della convergenza dominata, per $\mathrm{Re}(s)$ abbastanza grande abbiamo

$$\int_0^{+\infty} u'(t)\, dt = \lim_{s\to0} \int_0^{+\infty} e^{-st} u'(t)\, dt = \lim_{s\to0} [\mathcal{L}(u')](s) \overset{(1.38)}{=} \lim_{s\to0} s\widetilde{u}(s) - u(0^+). \tag{1.46}$$

[9] Poiché $\sigma \to +\infty$, si intende che σ è reale; tuttavia l'estensione al campo complesso non presenterebbe difficoltà, grazie all'analiticità di $\mathcal{L}(u)$...

[10] Nella formula (1.42) non abbiamo scritto $\int_s^{+\infty} [\mathcal{L}(u)](\tau)\, d\tau$, poiché abbiamo convenuto di riservare la notazione integrale all'integrale di Lebesgue.

[11] Poniamo $u(+\infty) := \lim_{t\to+\infty} u(t)$, se tale limite esiste.

D'altra parte

$$\int_0^{+\infty} u'(\tau)\,d\tau = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t u'(\tau)\,d\tau = \lim_{t\to+\infty} u(t) - u(0^+) = u(+\infty) - u(0^+), \tag{1.47}$$

e confrontando le ultime due identità otteniamo la (1.43).

Analogamente abbiamo

$$\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} s\widetilde{u}(s) - u(0^+) \overset{(1.38)}{=} \lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} [\mathcal{L}(u')](s) \overset{(1.36)}{=} 0, \tag{1.48}$$

uniformemente rispetto a $\mathrm{Im}(s)$, ovvero la (1.44). □

Osservazioni. (i) Il teorema del valore finale non si inverte: l'esistenza del $\lim_{s\to0} s\widetilde{u}(s)$ in $\mathbf{C}$ non implica l'esistenza di $u(+\infty)$. Ad esempio $u(t) = (\sin t)H(t)$ non converge per $t\to+\infty$, malgrado sia $s\widetilde{u}(s) = s/(s^2+1)\to 0$ per $s\to0$.

(ii) Pure il teorema del valore iniziale non si inverte: l'esistenza del $\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} s\widetilde{u}(s)$ in $\mathbf{C}$ (uniforme rispetto a $\mathrm{Im}(s)$) non implica l'esistenza di $u(0^+)$. (Omettiamo il controesempio, che risulta più complicato del precedente.)

Inversione della Trasformata di Laplace. Il seguente teorema fornisce una formula esplicita per l'antitrasformazione. Questa è basata sulla riduzione della trasformazione di Laplace a quella di Fourier, e si presta ad un'analoga interpretazione: la funzione $u(t)$ è rappresentata come una media di esponenziali, con pesi dati dalla funzione trasformata $\widetilde{u}$.

Teorema 1.12. *(di Bromwich-Mellin, o di Riemann-Fourier) Per ogni $u\in D_{\mathcal{L}}$,*

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2\pi i}\mathrm{V.P.}\int_{x+i\mathbf{R}} e^{st}\widetilde{u}(s)\,ds \\ &\left(= \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{(x+iy)t}\widetilde{u}(x+iy)\,dy\right) \qquad q\forall t\in\mathbf{R}, \forall x>\lambda(u). \end{aligned} \tag{1.49}$$

Dimostrazione. Si ponga

$$\varphi_x(y) := \int_{\mathbf{R}} e^{-(x+iy)t}u(t)\,dt = \widetilde{u}(x+iy) \qquad \forall x>\lambda(u), \forall y\in\mathbf{R},$$

ovvero

$$\varphi_x(y) = \int_{\mathbf{R}} e^{-xt}e^{-iyt}u(t)\,dt = \sqrt{2\pi}[\mathcal{F}(e^{-xt}u(t))](y) \qquad \forall x>\lambda(u), \forall y\in\mathbf{R}. \tag{1.50}$$

Poiché

$$\forall x>\lambda(u), \exists a>0: \quad \frac{|e^{-xt}e^{-iyt}u(t)|}{e^{-at}} \in L^2_t,$$

la trasformata di Fourier in (1.50) può essere intesa non solo nel senso di L^1 (ovvero come integrale di Lebesgue) ma anche in quello di L^2 (ovvero come valore principale). Il teorema di inversione della trasformazione di Fourier in L^2 fornisce allora

$$e^{-xt}u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big[\mathcal{F}^{-1}(\varphi_x)\big](t) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{V.P.}\int_{\mathbf{R}} e^{ity}\varphi_x(y)dy \qquad q\forall t\in\mathbf{R}, \forall x>\lambda(u), \tag{1.51}$$

ovvero la (1.49). □

Un Esercizio di Calcolo Complesso. A titolo di esercizio verifichiamo direttamente che la formula di Riemann-Fourier (1.49) vale per ogni $x > \lambda(u)$. Qui supporremo che

$$\exists\, C, a > 0 : \forall s \in \mathbf{C}_\lambda(u) \qquad |\widetilde{u}(s)| \leq C|s|^{-a}, \tag{1.52}$$

anche se, grazie alla dimostrazione sopra riportata, questa ipotesi aggiuntiva non è necessaria.

Per ogni x_1, x_2 con $\lambda(u) < x_1 < x_2$, in seguito alla Proposizione 1.6 la funzione $s \mapsto e^{st}\widetilde{u}(s)$ è analitica nella striscia del piano complesso compresa tra le rette $x_1 + i\mathbf{R}$ e $x_2 + i\mathbf{R}$. Fissiamo un qualsiasi $R > 0$, e denotiamo con B_R il bordo del rettangolo di vertici $x_1 - iR, x_1 + iR, x_2 + iR, x_2 - iR$. In seguito al Teorema Integrale di Cauchy

$$\int_{B_R} e^{st}\widetilde{u}(s)ds = 0 \qquad \forall R > 0. \tag{1.53}$$

Grazie alla (1.52) il modulo dell'integrale lungo il tratto orizzontale di ordinata $y = R$ è maggiorato da

$$\int_{x_1}^{x_2} e^{xt}|\widetilde{u}(x + iR)|\, dx \leq Ce^{x_2 t}|x_1 + iR|^{-a}(x_2 - x_1),$$

che tende a zero per $R \to +\infty$. Lo stesso vale per il modulo dell'integrale lungo il tratto orizzontale di ordinata $y = -R$. Allora grazie alla (1.53) tende a zero anche la differenza degli integrali lungo i due tratti verticali:

$$\int_{x_1 - iR}^{x_1 + iR} e^{st}\widetilde{u}(s)ds - \int_{x_2 - iR}^{x_2 + iR} e^{st}\widetilde{u}(s)ds \to 0 \qquad \text{per } R \to +\infty;$$

pertanto, dal momento che per $R \to +\infty$ entrambi gli integrali convergono nel senso del valore principale,

$$\frac{1}{2\pi i}\text{V.P.}\int_{x_1 + i\mathbf{R}} e^{st}\widetilde{u}(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i}\text{V.P.}\int_{x_2 + i\mathbf{R}} e^{st}\widetilde{u}(s)\, ds.$$

Osservazione. L'uso della formula di inversione della trasformata di Laplace è spesso scomodo, poiché richiede il calcolo di integrali in campo complesso. In diversi casi per antitrasformare una funzione risulta più conveniente prima scomporla in fratti semplici, e successivamente usare *all'indietro* le tavole di trasformazione, come vedremo nella prossima sezione.

L'Antitrasformabilià. Sarebbe auspicabile fornire un criterio per caratterizzare le funzioni antitrasformabili, ovvero per individuare l'insieme immagine $\mathcal{L}(D_\mathcal{L})$; ma il problema non si presenta facile. Ci limiteremo ad indicare delle condizioni sufficienti, ovvero un sottoinsieme di $\mathcal{L}(D_\mathcal{L})$.

Teorema 1.13. *(di Antitrasformabilità-I) Sia U una funzione complessa di variabile complessa, analitica per* $\text{Re}(s) > \lambda$ *per un opportuno* $\lambda \in \mathbf{R}$*, e tale che*

$$\exists \alpha > 1 : \sup_{y \in \mathbf{R}} |x + iy|^\alpha U(x + iy) \to 0 \qquad \textit{per } x \to +\infty.^{12} \tag{1.54}$$

Allora U è la trasformata di Laplace di una funzione $u \in D_\mathcal{L} \cap C^0(\mathbf{R})$. []

Questa implicazione non può essere invertita. Per ogni $a > 0$, ad esempio $U(s) = e^{-as}$ non soddisfa la condizione (1.54) (manca l'uniformità rispetto a $\text{Im}(s)$); infatti vedremo che e^{-as} è la trasformata della distribuzione δ_a $(= \delta(\cdot - a))$. La condizione (1.54) non è soddisfatta nemmeno dalla funzione

[12] O equivalentemente esistono $\lambda \in \mathbf{R}$, $\alpha > 1$ e $M > 0$ tali che $|s|^\alpha |U(s)| \leq M$ per $\text{Re}(s) > \lambda$.

$U(s) = 1/s$, che comunque è la trasformata della funzione di Heaviside. Questa funzione non è integrabile su $x + i\mathbf{R}$ (per $x > 0$), tuttavia le si può applicare la formula di Riemann-Fourier (1.49), poiché ivi l'integrale è inteso nel senso del valore principale. Questa osservazione e l'ultimo teorema forniscono il seguente risultato.

Corollario 1.14. *Se U è una funzione complessa di variabile complessa che soddisfa le condizioni del Teorema 1.13, allora sono antitrasformabili anche le funzioni della forma*

$$V(s) = U(s) + \frac{a}{s} \qquad \forall a \in \mathbf{C},$$

definite in un semipiano destro di $\mathbf{C}$ non contenente l'origine.

1.1 Esercizi.

1. Si verifichi che $te^{t^2} \cos(e^{t^2})H(t) \notin D_{\mathcal{L}}$.
2. Le trasformate delle funzioni di $D_{\mathcal{L}}$ sono necessariamente localmente limitate?
3. * Si forniscano ipotesi sugli $u \in D_{\mathcal{L}}$ tali che
$$\lambda(u) = \limsup \frac{\log |u(t)|}{t}.$$
4. * Esistono valori di $a, b \in \mathbf{C}$ tali che $u(t) = |i + t|^a e^{bt} H(t) \in D_{\mathcal{L}}$? Nel caso si determinino le relative ascisse di convergenza.
5. Posto $P(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n$, si calcoli $\mathcal{L}(P(D)u)$ per ogni $u \in D_{\mathcal{L}}$ che soddisfi le ipotesi della Proposizione (1.9).
6. Sia $u \in D_{\mathcal{L}}$ tale che, per un opportuno $x \in \mathbf{R}$, $\widetilde{u}(x + iy) = 0$ per ogni $y \in \mathbf{R}$. Cosa si può dire di u?
7. Si può applicare la (1.15) a $(1 + t)^2 H(t)$?
8. Cosa si può dire dell'ascissa di convergenza delle funzioni di $D_{\mathcal{L}} \cap L^2$? e di quelle di $D_{\mathcal{L}} \cap L^\infty$?
9. Dati $u \in D_{\mathcal{L}}$ e $n \in \mathbf{Z}$, si dica se $t^n u \in D_{\mathcal{L}}$ e $2^{nt} u \in D_{\mathcal{L}}$; nel caso si confrontino le ascisse di convergenza di queste funzioni.
10. Sia $u \in D_{\mathcal{L}}$ e $P = P(t)$ un qualsiasi polinomio (non identicamente nullo) a coefficienti complessi. Si confronti $\lambda(P(t)u)$ con $\lambda(u)$.
11. Si dica se le seguenti funzioni appartengono a $D_{\mathcal{L}}$ per qualche valore del parametro $c \in \mathbf{C}$:
$$u_c(t) = (1 + |ct|)^c H(t), \quad v_c(t) = (1 + |t|)^{ct^2} H(t), \quad w_c(t) = (1 + |ct|)^{t^2} H(t) \quad (t \in \mathbf{R});$$
nel caso si indichi il corrispondente semipiano di convergenza.
12. Si verifichi che, per ogni $u \in D_{\mathcal{L}}$ ed ogni $s \in \mathbf{C}_{\lambda(u)}$,
$$\mathrm{Re}(\mathcal{L}u(s)) = \int_{\mathbf{R}} \big[\mathrm{Re}(u(t)) \cos(t\ \mathrm{Im}(s)) +\ \mathrm{Im}(u(t)) \sin(t\, \mathrm{Im}(s))\big] e^{-t\,\mathrm{Re}(s)}\, dt,$$
e si calcoli l'analoga espressione di $\mathrm{Im}(\mathcal{L}u(s))$.
13. Si fornisca l'esempio di una funzione $u \in D_{\mathcal{L}}$ tale che $u(t)/t \notin D_{\mathcal{L}}$.

14. * Si verifichi che, per ogni $u \in D_{\mathcal{L}} \cap L^\infty_{loc}$, in generale

$$\big\{x \in \mathbf{R} : e^{-xt}u(t) \in L^1\big\} \neq \big\{x \in \mathbf{R} : e^{-xt}u(t) \in L^\infty\big\},$$

e tuttavia

$$\lambda(u) := \inf\big\{x \in \mathbf{R} : e^{-xt}u(t) \in L^1\big\} = \inf\big\{x \in \mathbf{R} : e^{-xt}u(t) \in L^\infty\big\}.$$

Quest'ultima uguaglianza vale anche per ogni $u \in D_{\mathcal{L}}$?
(L'ipotesi $u \in D_{\mathcal{L}} \cap L^\infty_{loc}$ è necessaria...)

2 Transformazione di Laplace di Distribuzioni

Abbiamo visto che la trasformazione di Laplace estende quella di Fourier definita in L^1; dal momento che quest'ultima trasformazione può essere estesa allo spazio $\mathcal{S}'$ delle distribuzioni temperate, ci chiediamo se non sia possibile estendere ad uno spazio di distribuzioni anche la trasformazione di Laplace. La risposta è positiva, naturalmente sotto opportune restrizioni.

Definiamo la classe $\bar{D}_{\mathcal{L}}$ delle distribuzioni trasformabili secondo Laplace, e l'ascissa di convergenza $\bar{\lambda}$: [13]

$$\bar{D}_{\mathcal{L}} := \big\{T \in \mathcal{D}' : \operatorname{supp}(T) \subset \mathbf{R}^+, \exists x \in \mathbf{R} : e^{-xt}T(t) \in \mathcal{S}'_t\big\}, \tag{2.1}$$

$$\bar{\lambda}(T) := \inf\big\{x \in \mathbf{R} : e^{-xt}T(t) \in \mathcal{S}'_t\big\} \ (\in [-\infty, +\infty[) \qquad \forall T \in \bar{D}_{\mathcal{L}}, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{C}_{\bar{\lambda}(T)} := \{s \in \mathbf{C} : \ \operatorname{Re}(s) > \bar{\lambda}(T)\} \qquad \forall T \in \bar{D}_{\mathcal{L}}. \tag{2.3}$$

Desideriamo dare un senso ad una formula come la (1.11), con l'integrale sostituito da un opportuno prodotto di dualità, $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Possiamo porre ad esempio

$$[\bar{\mathcal{L}}(T)](s) = \langle T(t), e^{-st}\rangle \qquad \forall s \in \mathbf{C}_{\bar{\lambda}(T)}, \forall T \in \bar{D}_{\mathcal{L}} \ \ ? \tag{2.4}$$

Ma qui non possiamo utilizzare la dualità tra $\mathcal{D}'$ e $\mathcal{D}$ poiché $e^{-st} \notin \mathcal{D}$, e nemmeno quella tra $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{S}$ poiché $e^{-st} \notin \mathcal{S}$. Comunque non dovrebbero esserci problemi per $t \to -\infty$, poiché il supporto di T è confinato a $\mathbf{R}^+$. Per $\operatorname{Re}(s) > 0$, e^{-st} decade esponenzialmente per $t \to +\infty$, e questo potrebbe aiutare. Ma cosa possiamo fare per $\operatorname{Re}(s) \leq 0$?

Superiamo questa difficoltà mediante la seguente costruzione (un po' macchinosa). Fissiamo una qualsiasi funzione $\zeta \in C^\infty$ tale che $\zeta = 1$ in $\mathbf{R}^+$ e con supporto limitato a sinistra. Per ogni $T \in \bar{D}_{\mathcal{L}}$ ed ogni $s \in \mathbf{C}_{\bar{\lambda}(T)}$, sia $x \in]\bar{\lambda}(T), \operatorname{Re}(s)[$. Per via della (2.2) $e^{-xt}T(t) \in \mathcal{S}'$, e d'altra parte $e^{(x-s)t}\zeta(t) \in \mathcal{S}$ poiché $\operatorname{Re}(x - s) < 0$. Poniamo allora

$$[\bar{\mathcal{L}}(T)](s) := {}_{\mathcal{S}'}\langle e^{-xt}T(t), e^{(x-s)t}\zeta(t)\rangle_{\mathcal{S}} \qquad \forall s \in \mathbf{C}_{\bar{\lambda}(T)}, \forall T \in \bar{D}_{\mathcal{L}}, \tag{2.5}$$

ed osserviamo che questo valore non dipende né dalla scelta di $x \in]\bar{\lambda}(T), \operatorname{Re}(s)[$ né da quella di ζ. [Ex] Quest'ultima definizione è *formalmente* equivalente a (2.4), che può essere intesa come un'abbreviazione della (2.5).

[13] La condizione $\operatorname{supp}(T) \subset \mathbf{R}^+$ ovviamente significa che $\langle T, v\rangle = 0$ per ogni $v \in \mathcal{D}$ tale che $\operatorname{supp}(v) \subset]-\infty, 0[$ $(= \mathbf{R} \setminus \mathbf{R}^+)$. Usiamo la notazione $\mathcal{S}'_t$ per evidenziare che la variabile independente è t; qui x funge solo da parametro.
Qui non si parla di ascissa di convergenza *assoluta,* poiché per il prodotto di dualità non ha senso parlare di convergenza assoluta.

Poiché $L^1 \subset \mathcal{S}'$, la trasformazione $\bar{\mathcal{L}}$ delle distribuzioni estende quella (denotata con $\mathcal{L}$) delle funzioni:

$$D_{\mathcal{L}} \subset \bar{D}_{\mathcal{L}}, \tag{2.6}$$

$$\bar{\lambda}(u) \leq \lambda(u), \qquad \bar{\mathcal{L}}(u) = \mathcal{L}(u) \qquad \forall u \in D_{\mathcal{L}}. \tag{2.7}$$

Tuttavia vedremo che

$$\bar{D}_{\mathcal{L}} \cap L^1_{loc} \not\subset D_{\mathcal{L}} \qquad \text{e} \qquad \exists u \in D_{\mathcal{L}} \text{ tale che } \bar{\lambda}(u) < \lambda(u). \tag{2.8}$$

Esempi. A partire dalla (2.5), che come abbiamo visto è formalmente equivalente alla (2.4), si ottengono immediatamente le seguenti formule: per ogni $s \in \mathbf{C}$, ogni $a \geq 0$, ed ogni $k \in \mathbf{N}$,

$$[\bar{\mathcal{L}}(\delta)](s) = 1, \quad [\bar{\mathcal{L}}(\delta_a)](s) = e^{-as}, \quad [\bar{\mathcal{L}}(D^k\delta)](s) = s^k, \quad [\bar{\mathcal{L}}(D^k\delta_a)](s) = s^k e^{-as}. \tag{2.9}$$

Si noti che δ_a ($:= \delta(\cdot - a)$ è causale se e solo se $a \geq 0$ ($a = 0$ incluso).

In $\bar{D}_{\mathcal{L}}$ abbiamo un risultato analogo alla (1.34):

Proposizione 2.1. *Per ogni $T \in \bar{D}_{\mathcal{L}}$, la funzione $s \mapsto [\bar{\mathcal{L}}(T)](s)$ è analitica in $\mathbf{C}_{\bar{\lambda}(T)}$. []*

Comunque le (1.35) e (1.36) non si estendono alle distribuzioni; ad esempio vedremo che $\bar{\mathcal{L}}(D\delta) = s$ per ogni $s \in \mathbf{C}$.

Le Proposizioni 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 valgono anche in $\bar{D}_{\mathcal{L}}$. La formula di inversione vale anche per $T \in \bar{D}_{\mathcal{L}}$, sotto ipotesi che qui non specifichiamo.

Estendiamo ora alle distribuzioni il teorema di trasformazione delle derivate, che in questo ambito assume una forma piu' semplice. Ricordiamo che con D indichiamo la derivazione nel senso delle distribuzioni.

Proposizione 2.2. *(Trasformazione di Laplace e Differenziazione in $\mathcal{D}'$) Per ogni $u \in \bar{D}_{\mathcal{L}}$,*

$$Du \in \bar{D}_{\mathcal{L}}, \qquad \bar{\lambda}(Du) \leq \bar{\lambda}(u), \qquad [\bar{\mathcal{L}}(Du)](s) = s[\bar{\mathcal{L}}(u)](s) \quad \forall s \in \mathbf{C}_{\bar{\lambda}(u)}. \tag{2.10}$$

Più in generale, per ogni $k \in \mathbf{N}$,

$$D^k u \in \bar{D}_{\mathcal{L}}, \qquad \bar{\lambda}(D^k u) \leq \bar{\lambda}(u), \qquad [\bar{\mathcal{L}}(D^k u)](s) = s^k[\bar{\mathcal{L}}(u)](s) \quad \forall s \in \mathbf{C}_{\bar{\lambda}(u)}. \tag{2.11}$$

Dimostrazione. Ovviamente basta dimostrare la (2.10), e poi procedere per induzione. Grazie alla Proposizione 1.1, questa consegue dall'analoga formula valida per la trasformazione di Fourier. □

Verifica della (2.10) **in un caso particolare.** Sia $u \in \Sigma$ e supponiamo che Du coincida con la derivata quasi ovunque, che al solito denotiamo con u', salvo per $t = 0$ ove u può presentare un salto. Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathcal{L}}(Du)](s) = \int_{\mathbf{R}} e^{-st} u'(t)\, dt \quad &= \int_{\mathbf{R}} s e^{-st} u(t)\, dt + \lim_{t \to +\infty} e^{-st} u(t) - \lim_{t \to -\infty} e^{-st} u(t) \\ &= \int_{\mathbf{R}} s e^{-st} u(t)\, dt = s[\tilde{\mathcal{L}}(u)](s) \qquad \forall s \in \mathbf{C}_{\tilde{\lambda}(u)}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Osservazioni. (i) Per le funzioni che soddisfano le ipotesi della parte (ii) della Proposizione 1.7, la (2.10) è equivalente alla (1.38); infatti, essendo $Du = u' + u(0^+)\delta$, abbiamo

$$\bar{\mathcal{L}}(Du) = \bar{\mathcal{L}}(u' + u(0^+)\delta) = \bar{\mathcal{L}}(u') + u(0^+)\bar{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{L}(u') + u(0^+). \tag{2.13}$$

* (ii) Esiste $u \in D_{\mathcal{L}}$ tale che $\bar{\lambda}(u) < \lambda(u)$. Si ponga ad esempio

$$v(t) = (\sin \pi e^t)H(t) \in D_{\mathcal{L}}, \qquad \text{da cui} \qquad u(t) = Dv(t) = \pi e^t(\cos \pi e^t)H(t) \in D_{\mathcal{L}}.$$

(Si noti che $u \in \mathcal{S}'$, malgrado l'andamento esponenziale. Comunque u non ha una vera e propria crescita esponenziale, per via della presenza del fattore oscillante.) Si verifica facilmente che per l'ascissa di *assoluta* integrabilità $\lambda(v) = 0$ e $\lambda(u) = 1$. Poiché

$$\bar{\lambda}(u) \overset{(2.10)}{\leq} \bar{\lambda}(v) \overset{(2.7)}{\leq} \lambda(v),$$

concludiamo che in questo caso $\bar{\lambda}(u) < \lambda(u)$.

* (iii) Esistono delle funzioni causali localmente integrabili che stanno in $\bar{D}_{\mathcal{L}}$ ma non in $D_{\mathcal{L}}$. In altri termini $\bar{D}_{\mathcal{L}} \cap L^1_{loc} \not\subset D_{\mathcal{L}}$. Sia ad esempio

$$v(t) = (\sin \pi e^{t^2})H(t) \in D_{\mathcal{L}}(\subset \bar{D}_{\mathcal{L}}) \qquad \text{e quindi} \qquad u(t) = Dv(t) = 2\pi t e^{t^2}(\cos \pi e^{t^2})H(t).$$

Per il teorema di derivazione $u \in \bar{D}_{\mathcal{L}}$, ma si verifica facilmente che $u \notin D_{\mathcal{L}}$, poiché viene meno l'*assoluta* integrabilità dell'integrale di Laplace. □

Nel seguito ometteremo la barra e scriveremo $\mathcal{L}$, $D_{\mathcal{L}}$, λ, invece di $\bar{\mathcal{L}}$, $\bar{D}_{\mathcal{L}}$, $\bar{\lambda}$. Contiamo che si possa comprendere dal contesto se ci riferiremo a funzioni o a distribuzioni.

Teorema 2.3. *(di Antitrasformabilità-II) Una funzione U complessa di variabile complessa è la trasformata di Laplace di una distribuzione $T \in \bar{D}_{\mathcal{L}}$ sse U è analitica per* $\mathrm{Re}(s) > \lambda$ *e*

$$\exists M > 0, \exists m \in \mathbf{N}, m \geq 1 : \ |U(s)| \leq M(1 + |s|)^m \qquad \textit{per } \mathrm{Re}(s) > \lambda.[] \tag{2.14}$$

Antitrasformazione delle Funzioni Razionali. Sia ora F una *funzione razionale* di s, ovvero il quoziente di due polinomi:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{\sum_{\ell=1}^m a_\ell s^\ell}{\sum_{\ell=1}^n b_\ell s^\ell} \qquad (a_m, b_n \neq 0, \ m, n \in \mathbf{N}). \tag{2.15}$$

Se $m \geq n$ allora come noto F può essere riscritta nella forma

$$F(s) = \sum_{k=1}^{m-n} c_k s^k + \frac{\widetilde{P}(s)}{Q(s)} =: G(s) + R(s) \qquad \text{per } \mathrm{Re}(s) > \lambda, \tag{2.16}$$

con $c_{m-n} = a_m/b_n \neq 0$, $\widetilde{P}(s)$ polinomio di grado $\widetilde{m} < n$, $\widetilde{P}(s)$ e $Q(s)$ polinomi primi tra loro (ovvero tali che la funzione razionale $\widetilde{P}(s)/Q(s)$ non sia ulteriormente riducibile), e λ maggiore della parte reale delle radici di Q. La funzione G è immediatamente antitrasformabile nell'ambito delle distribuzioni:

$$[\mathcal{L}^{-1}(G)](t) = \sum_{k=1}^{m-n} c_k D^k \delta. \tag{2.17}$$

Resta ora da calcolare l'antitrasformata della funzione razionale *propria* $R(s)$, che è della forma (2.15) con $m < n$. Siano $\{z_h : h = 1, ..., \ell\}$ le radici complesse distinte del polinomio $Q(s)$, ciascuna di molteplicità r_h; quindi $r_1 + ... + r_\ell = n$. La funzione R è definita per tutti gli $s \in \mathbf{C}$ diversi dagli z_h; come trasformata di Laplace R ha quindi dominio nel semipiano di convergenza $\{s \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}(s) > \max\{\mathrm{Re}(z_h) : h = 1, ..., \ell\}\}$. Osservato che $Q(s) = b_n \Pi_{h=1}^{\ell} (s - z_h)^{r_h}$, abbiamo

$$R(s) = \frac{\widetilde{P}(s)}{b_n \Pi_{h=1}^{\ell} (s - z_h)^{r_h}}, \tag{2.18}$$

e questa funzione può essere decomposta in una somma di *fratti semplici:*

$$R(s) = \sum_{h=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{r_h} \frac{c_{hk}}{(s - z_h)^k} . \tag{2.19}$$

I coefficienti c_{hk} possono essere facilmente identificati riscrivendo il membro di destra come una somma di frazioni col comune denominatore $\Pi_{h=1}^{\ell} (s - z_h)^{r_h}$. Poiché

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{zt} H(t) \right) = \frac{1}{(s-z)^k} \qquad \forall z \in \mathbf{C}, \forall k \in \mathbf{N}, \tag{2.20}$$

antitrasformando (2.19) si perviene quindi alla formula

$$[\mathcal{L}^{-1}(R)](t) = \sum_{h=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{r_h} c_{hk} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{z_h t} H(t) \qquad \text{per } t > 0. \tag{2.21}$$

Abbiamo quindi dimostrato il seguente risultato.

Corollario 2.4. *(di Heaviside) Il quoziente di due polinomi,* $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ *(cf.* (2.15)*), è la trasformata di Laplace di una opportuna distribuzione. Questa è una funzione solo se il grado di* $P(s)$ *è minore di quello di* $Q(s)$*. Più precisamente,* (2.15) *implica* (2.17) *e* (2.21)*.*

Formula di Heaviside per Radici Semplici. Supponiamo ora che le radici z_h del polinomio $Q(s)$ siano tutte semplici, ovvero $Q(s) = b_n \Pi_{k=1}^{m} (s - z_h)$, cosicché lo sviluppo in fratti semplici è della forma

$$R(s) = \frac{\widetilde{P}(s)}{Q(s)} = \sum_{h=1}^{m} \frac{c_h}{s - z_h} . \tag{2.22}$$

In questo caso possiamo facilmente identificare i coefficienti $c_1, ..., c_m$. Per ogni k, poiché $Q(z_k) = 0$ abbiamo

$$R(s)(s - z_k) = \frac{\widetilde{P}(s)}{[Q(s) - Q(z_k)]/(s - z_k)} = c_k + \sum_{h \neq k} \frac{c_h}{s - z_h}(s - z_k) \qquad \text{per } k = 1, ..., m, \tag{2.23}$$

da cui, passando al limite per $s \to z_k$,

$$c_k = \frac{\widetilde{P}(z_k)}{Q'(z_k)} = \lim_{s \to z_k} \frac{\widetilde{P}(s)(s - z_k)}{Q(s)} \qquad \text{per } k = 1, ..., m. \tag{2.24}$$

Pertanto, se le radici z_h del polinomio $Q(s)$ siano tutte semplici, vale la classica formula di Heaviside:

$$[\mathcal{L}^{-1}(R)](t) = \sum_{h=1}^{m} \frac{\widetilde{P}(z_h)}{Q'(z_h)} e^{z_h t} H(t) \qquad \text{per } t > 0. \tag{2.25}$$

Caso delle Radici Multiple. Assumiamo ad esempio che sia $Q(s) = (s - z)^r$ per uno $z \in \mathbf{C}$ ed un intero $r \geq 1$, e cerchiamo un'espansione in fratti non semplici della forma (2.19). Dal momento che

$$[D_s^{r-k}(s - z_h)^r R(s)]_{s=z_h} = (r - k)! c_{hk} \qquad \text{per } k = 1, ..., r, h = 1, ..., \ell, \tag{2.26}$$

possiamo identificare i coefficienti della (2.21):

$$c_{hk} = \frac{1}{(r-k)!}[D_s^{r-k}(s - z_h)^r R(s)]_{s=z_h} \qquad \text{per } k = 1, ..., r, h = 1, ..., \ell, \tag{2.27}$$

3 Trasformazione di Fourier ed Equazioni Differenziali

Siano $a_0, ..., a_m \in \mathbf{C}$ ($a_m \neq 0$) ed $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ una funzione data. Vogliamo studiare l'ODE lineare a coefficienti costanti

$$P(D)u(t) := \sum_{n=0}^{m} a_n D^n u(t) = f(t) \qquad t \in \mathbf{R}. \tag{3.1}$$

Se intendiamo limitarci al caso delle funzioni, allora L^2 con derivate nel senso delle distribuzioni costituisce l'ambito funzionale in cui sembra più naturale sviluppare questa trattazione. Assumiamo quindi $u, f \in L^2$. In effetti la funzione f è data; per quanto riguarda u, occorrerà invece verificare a posteriori che effettivamente $u \in L^2$.

Applicando la trasformazione di Fourier ad entrambi i membri della (3.1), perveniamo a

$$P(D)u = f \qquad \Leftrightarrow \qquad P(i\xi)\widehat{u} = \widehat{f}; \tag{3.2}$$

in altri termini l'equazione differenziale equivale all'equazione algebrica

$$\sum_{n=0}^{m} a_n (i\xi)^n \widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}.$$

Se

$$\big(P(i\xi) =\big) \sum_{n=0}^{m} a_n (i\xi)^n \neq 0 \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}, \tag{3.3}$$

allora l'equazione (3.1) è equivalente a

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{P(i\xi)} \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}. \tag{3.4}$$

A questo punto basta invertire la trasformazione di Fourier; sotto l'ipotesi (3.3) la (3.4) è quindi equivalente a

$$u = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{f}(\xi)}{P(i\xi)}\right), \tag{3.5}$$

Il secondo membro della (3.4) infatti è antitrasformabile, in quanto è elemento di $\mathcal{S}'$ per via della (3.3). Grazie alla formula della convoluzione,

$$u = (2\pi)^{N/2}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{P(i\xi)}\right) * \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) = (2\pi)^{N/2}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{P(i\xi)}\right) * f. \tag{3.6}$$

Questa funzione effettivamente appartiene ad L^2, ed è l'unica soluzione dell'equazione (3.1) in tale spazio. Comunque in generale la soluzione dell'equazione $P(D)u = f$ non è unica in $\mathcal{D}'$, ed è individuata a meno della somma di una qualsiasi soluzione dell'equazione omogenea $P(D)u = 0$.

Si noti che qui non abbiamo prescritto condizioni ai limiti poiché abbiamo posta l'equazione su tutto $\mathbf{R}$; in questo caso la soluzione non contiene costanti additive arbitrarie. In effetti le condizioni ai limiti sono surrogate dalla regolarità, ovvero dall'integrabilità L^2. Si ricordi che lo spazio delle funzioni continue con limite nullo all'infinito è denso in L^2.

La Soluzione Fondamentale. Lo studio dell'equazione differenziale (3.1) può anche essere impostato dal punto di vista della teoria dei sistemi: la soluzione (supposta unica) è interpretata come la risposta di un sistema fisico rappresentato dall'operatore differenziale. L'equazione definisce allora un operatore $L : f \mapsto u$ lineare ed anche invariante per traslazioni temporali, dal momento che i coefficienti $\{a_n\}$ non dipendono da t.

Andando oltre l'ambito delle funzioni, assumiamo che siano $f, u \in \mathcal{S}'$. Per $f = \delta$ in (3.6) la soluzione $h = Lu$ rappresenta la risposta del sistema all'impulso unitario. In teoria delle equazioni differenziali lineari (ODEs o PDEs) questa è detta una *soluzione fondamentale.* In teoria dei sistemi questa è detta la *funzione di trasferimento* (del sistema lineare rappresentato dall'operatore L) *in tempo:*

$$h := (2\pi)^{N/2}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{P(i\xi)}\right) * \delta = (2\pi)^{N/2}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{P(i\xi)}\right). \tag{3.7}$$

In seguito alla (3.4) $\mathcal{F}(h) = (2\pi)^{N/2}/P(i\xi)$ è detta la *funzione di trasferimento in frequenza.* [14] Si può infatti riscrivere la (3.6) nella forma

$$u = h * f \qquad \text{con} \qquad \sum_{n=0}^{m} a_n D^n h = \delta. \tag{3.8}$$

Soluzioni Distribuzioni. Per via del teorema fondamentale dell'algebra, l'*equazione caratteristica*

$$\big(P(i\xi) =\big) \sum_{n=0}^{m} a_n (i\xi)^n = 0$$

ha esattamante m radici complesse eventualmente ripetute. Indichiamo con $\{\xi_j : j = 1, ..., \ell\}$ le radici distinte, e con r_j la molteplicità di ξ_j per ogni j; quindi $r_1 + ... + r_\ell = m$. Pertanto

$$P(i\xi) = a_m \prod_{j=1}^{\ell} (i\xi - i\xi_j)^{r_j} \qquad \forall \xi \in \mathbf{C},$$

da cui consegue

$$P(D) = a_m \prod_{j=1}^{\ell} (D - i\xi_j)^{r_j}.$$

Poiché

$$(D - i\xi_j)^{r_j} (t^{k-1} e^{i\xi_j t}) = 0 \qquad \text{perr } k = 1, ..., r_j,\ j = 1, ..., \ell,$$

queste radici sono associate alle sequenti m soluzioni linearmente indipendenti

$$u_{j,k}(t) = t^{k-1} e^{i\xi_j t} \qquad (k = 1, ..., r_j,\ j = 1, ..., \ell)$$

dell'equazione differenziale omogenea $\sum_{n=0}^{m} a_n D^n u(t) = 0$.

[14] Questa terminologia è propria della *teoria dei sistemi lineari,* che illustreremo più avanti. Il termine *soluzione fondamentale* è usato dagli analisti matematici. (Nel caso di Fourier, visto che le condiz. al bordo di $\mathbf{R}$ sono implicitamente nulle, si puo' parlare di funzione di Green: $G(x, 0)$.)

Per ciascun j,

$$\begin{cases} \xi_j \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad u_{j,1}, ..., u_{j,r_j} \in \mathcal{S}' \\ \xi_j \notin \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad u_{j,1}, ..., u_{j,r_j} \in \mathcal{D}' \setminus \mathcal{S}' \end{cases} \qquad \text{per } j = 1, ..., \ell. \tag{3.9}$$

Pertanto, se vale la (3.3) allora, definendo la funzione h come in (3.7),

$$\begin{aligned} &h \text{ è l'unica soluzione fondamentale dell'equazione (3.1) in } \mathcal{S}', \\ &u = h * f \text{ è l'unica soluzione dell'equazione (3.1) in } \mathcal{S}', \forall f \in \mathcal{S}'. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Se invece $\big(P(i\widetilde{\xi}) =\big) \sum_{n=0}^{m} a_n (i\widetilde{\xi})^n = 0$ per un opportuno $\widetilde{\xi} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, allora la funzione $\widetilde{u}(t) = e^{i\widetilde{\xi}t}$ risolve l'equazione omogenea (3.1). In questo caso viene meno l'unicità della soluzione fondamentale, e quindi pure la soluzione dell'equazione non omogenea (3.1) non è unica.

Esempi. Si considerino le due equazioni differenziali

$$u - u'' = f(t), \qquad u + u'' = f(t). \tag{3.11}$$

A queste sono rispettivamente associate gli operatori

$$P_1(D) := I - D^2, \qquad P_2(D) := I + D^2 \qquad (I\text{: operatore identità}),$$

i quali corrispondono ai polinomi caratteristici

$$P_1(i\xi) = 1 + \xi^2, \qquad P_2(i\xi) = 1 - \xi^2 \qquad (\xi \in \mathbf{R}).$$

L'ipotesi (3.3) è soddisfatta da $P_1(i\xi)$, ma non da $P_2(i\xi)$. Quindi il discorso precedente può essere applicato solo alla prima equazione. (Per il problema ai valori iniziali relativo alla seconda useremo la trasformazione di Laplace.)

La precedente discussione può essere estesa ai sistemi di equazioni differenziali ordinarie, alle PDEs lineari, ed anche a diversi altri problemi lineari.

3.1 Esercizi.

1. Si generalizzi la discussione svolta per le equazioni (3.11) alle PDEs

$$u - \Delta u = f, \qquad u + \Delta u = f \qquad \text{in } \mathbf{R}^N. \tag{3.12}$$

4 Trasformazione di Laplace ed Equazioni Differenziali

Consideriamo un problema ai valori iniziali per un'equazione differenziale alle derivate ordinarie, ad esempio del secondo ordine a coefficienti costanti. Dati $\alpha, \beta, \gamma, y_0, y_1 \in \mathbf{C}$ ($\alpha \neq 0$) ed una funzione complessa causale f, cerchiamo una funzione complessa causale y tale che

$$\begin{cases} P(D)y := \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = f(t) \qquad \text{per } t > 0, \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1. \end{cases} \tag{4.1}$$

Supponiamo $f \in D_{\mathcal{L}}$ e cerchiamo una soluzione $y \in D_{\mathcal{L}}$. Assumendo che tale soluzione esista, applichiamo la trasformazione di Laplace all'equazione differenziale, e poniamo $Y := \mathcal{L}(y)$ e $F := \mathcal{L}(f)$. Per il momento procediamo formalmente, senza specificare il semipiano di convergenza delle trasformate. Ricordando che

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - y(0),\\
&\mathcal{L}(y'') = s\mathcal{L}(y') - y'(0) = s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0),
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

otteniamo la seguente equazione in frequenza:

$$
\alpha\big[s^2Y(s) - sy_0 - y_1\big] + \beta\big[sY(s) - y_0\big] + \gamma Y(s) = F(s) \qquad \text{per } \operatorname{Re}(s) > \lambda(f). \tag{4.3}
$$

Ponendo

$$
P(s) := \alpha s^2 + \beta s + \gamma, \qquad \Phi(s) := \alpha y_0 s + \alpha y_1 + \beta y_0, \tag{4.4}
$$

possiamo allora riscrivere l'equazione trasformata (4.3) nella forma

$$
P(s)Y(s) = \Phi(s) + F(s) \qquad \text{per } \operatorname{Re}(s) > \lambda(f). \tag{4.5}
$$

$P(s)$ è detto il *polinomio caratteristico* dell'operatore differenziale $P(D)$; denotando con $s_1, s_2 \in \mathbf{C}$ le sue radici (eventualmente coincidenti), abbiamo

$$
P(s) \neq 0 \qquad \text{per } \operatorname{Re}(s) > \max\{\operatorname{Re}(s_1), \operatorname{Re}(s_2)\}.
$$

L'equazione (4.5) è quindi equivalente a

$$
Y(s) = \frac{\Phi(s)}{P(s)} + \frac{F(s)}{P(s)} \qquad \text{per } \operatorname{Re}(s) > \max\{\operatorname{Re}(s_1), \operatorname{Re}(s_2), \lambda(f)\}, \tag{4.6}
$$

ed antitrasformando entrambi i membri otteniamo la soluzione del problema (4.1):

$$
y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Phi(s)}{P(s)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{P(s)}\right) \qquad \text{in } \mathbf{R}^+. \tag{4.7}
$$

Per il teorema della convoluzione abbiamo

$$
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{P(s)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P(s)}\right) * \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P(s)}\right) * f, \tag{4.8}
$$

e quindi

$$
y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Phi(s)}{P(s)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P(s)}\right) * f \qquad \text{in } \mathbf{R}^+. \tag{4.9}
$$

Entrambi gli addendi dipendono dall'operatore differenziale tramite il polinomio caratteristico $P(s)$. Il primo termine dipende anche dai dati iniziali e rappresenta la *risposta libera* del sistema. Il secondo termine dipende anche dalla funzione f, e rappresenta la *risposta forzata.*

Poiché le funzioni $\Phi(s)/P(s)$ e $1/P(s)$ sono definite per $\operatorname{Re}(s) > \max\{\operatorname{Re}(s_1), \operatorname{Re}(s_2)\}$, la funzione y ha ascissa di convergenza

$$
\lambda(y) \leq \max\{\operatorname{Re}(s_1), \operatorname{Re}(s_2), \lambda(f)\} =: M;
$$

le formule precedenti quindi valgono almeno per gli s aventi parte reale $> M$. [15] Decomponendo $\Phi(s)/P(s)$ e $1/P(s)$ in fratti semplici e poi applicando il Teorema 1.13 di antitrasformabilità, concludiamo che $y \in D_{\mathcal{L}}$. Inoltre queste antitrasformate possono essere rappresentate mediante la classica formula di Heaviside (generalizzata) (2.27).

[15] Queste restrizioni sull'ascissa di convergenza non sono rilevanti; in particolare non hanno alcuna conseguenza sulle proprietà della soluzione.

Riformulazione del Problema di Cauchy in $\mathcal{D}'$. Mostriamo come il problema di Cauchy (4.1) possa essere riscritto come una singola equazione nel senso delle distribuzioni.

Se $y = y(t)$ è causale ed assolutamente continua in $]0, +\infty[$ e se esiste $y(0+) \in \mathbf{C}$, allora $y - y(0+)H$ è assolutamente continua in $\mathbf{R}$. Pertanto, denotando ancora con Dy la derivata nel senso delle distribuzioni e con y' quella quasi ovunque,

$$D[y - y(0+)H(t)] = y' \qquad \text{i.e.,} \qquad Dy = y' + y(0+)\delta \qquad \text{in } \mathcal{D}'. \tag{4.10}$$

Analogamente, se pure y' è assolutamente continua in $]0, +\infty[$ e se esiste anche $y'(0+) \in \mathbf{C}$, allora

$$D[y' - y'(0+)H(t)] = y'' \qquad \text{i.e.,} \qquad D(y') = y'' + y'(0+)\delta \qquad \text{in } \mathcal{D}'. \tag{4.11}$$

Quindi

$$D^2 y = D(Dy) \overset{(4.10)}{=} D(y') + y(0+)D\delta \overset{(4.11)}{=} y'' + y(0+)D\delta + y'(0+)\delta \qquad \text{in } \mathcal{D}'. \tag{4.12}$$

Definito l'operatore

$$P(D) := \alpha D^2 + \beta D + \gamma I \qquad \text{in } \mathcal{D}' \text{ (con } D = \text{derivata nel senso di } \mathcal{D}'(\mathbf{R})), \tag{4.13}$$

(4.10) e (4.12) forniscono la formula

$$P(D)y = \alpha y'' + \beta y' + \gamma y + \alpha y(0+)D\delta + [\alpha y'(0+) + \beta y(0+)]\delta \qquad \text{in } \mathcal{D}'. \tag{4.14}$$

Questo permette di riscrivere il problema di Cauchy (4.1) come una singola equazione su tutto $\mathbf{R}$ nel senso delle distribuzioni (per la funzione causale y):

$$P(D)y = f(t) + \alpha y^0 D\delta + [\alpha y^1 + \beta y^0]\delta \qquad \text{in } \mathcal{D}'. \tag{4.15}$$

Uso della Trasformazione $\mathcal{L}$ in $\mathcal{D}'$. Come abbiamo visto, l'uso delle distribuzioni consente di inglobare i valori iniziali nel termine forzante. Vediamo ora come questo espediente fornisca una trattazione più sintetica del problema di Cauchy.

Il secondo membro dell'equazione (4.5) è

$$G(s) := \Phi(s) + F(s) = \alpha y_0 s + \alpha y_1 + \beta y_0 + F(s) \qquad \text{per } \operatorname{Re}(s) > \lambda(f). \tag{4.16}$$

Si noti che si perviene allo stesso risultato trasformando l'equazione (4.15).

Ricordando che

$$\lambda(D^n\delta) = -\infty, \qquad \mathcal{L}(D^n\delta) = s^n \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \tag{4.17}$$

abbiamo

$$g := \mathcal{L}^{-1}(G) = \alpha y_0 D\delta + (\alpha y_1 + \beta y_0)\delta + f \ (\in \bar{D}_{\mathcal{L}}), \qquad \lambda(g) = \lambda(f). \tag{4.18}$$

L'equazione (4.5) si legge quindi $P(s)Y(s) = G(s)$, ed ha soluzione

$$Y(s) = \frac{G(s)}{P(s)} \qquad \text{per } \operatorname{Re}(s) > \max\{\operatorname{Re}(s_1), \operatorname{Re}(s_2), \lambda(f)\}. \tag{4.19}$$

Applicando l'antitrasformazione $\mathcal{L}^{-1}$, si perviene allora alla soluzione nel senso delle distribuzioni del problema (4.1):

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{P(s)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P(s)}\right) * g \qquad \text{in } \mathbf{R}^+, \tag{4.20}$$

che è equivalente alla (4.9). [16]

La Funzione di Trasferimento. Anche ai problemi differenziali ai valori iniziali si può applicare il punto di vista dei sistemi lineari, che abbiamo già incontrato nello studio delle equazioni differenziali su tutto $\mathbf{R}$. In questo caso la soluzione y dipende linearmente dai dati y_0, y_1 e dal termine forzante f. Questo è ancor più chiaro in seguito a quanto abbiamo osservato a proposito dell'uso della trasformazione di Laplace in $\mathcal{D}'$.

Supponiamo

$$y_0 = y_1 = 0, \tag{4.21}$$

cosicché il sistema che trasforma l'*ingresso* f nell'*uscita* u è lineare (piuttosto che affine). [17] Con terminologia propria della teoria dei sistemi, l'operatore di risoluzione $L : f \mapsto y$ è detto un *filtro continuo.* Ci limitiamo quindi a studiare la dipendenza di y da f individuata dal problema (4.1), (4.21), che appunto definisce un operatore lineare $L : f \mapsto y$.

Questo definisce un sistema che associa la risposta $h := L(\delta)$ in tempo all'impulso unitario. Quindi

$$(P(D)h :=)\ \alpha D^2 h + \beta D h + \gamma h = \delta \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}), \tag{4.22}$$

ovvero grazie alla (4.9)

$$h = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P(s)}\right) * \delta = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P(s)}\right) \left(\in \bar{D}_{\mathcal{L}} \subset \mathcal{D}'\right).$$

Applicando la trasformazione $\mathcal{L}$ si ottiene quindi la risposta in frequenza (complessa):

$$[\mathcal{L}(h)](s) = [\mathcal{L}(L(\delta))](s) = \frac{1}{P(s)}.$$

La funzione $\mathcal{L}(h)$ è detta la *funzione di trasferimento* del sistema lineare L in frequenza, o anche lo *spettro* del sistema L. La sua antitrasformata $\mathcal{L}^{-1}(1/P(s))$ è quindi detta la *funzione di trasferimento nel tempo.*

Tornando al caso generale con dati iniziali y_0 e y_1 non necessariamente nulli, la (4.9) assume quindi la forma

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Phi(s)}{P(s)}\right) + h * f, \tag{4.23}$$

che, ricordando la (4.18) e utilizzando la (4.20), si può anche riscrivere nel senso delle distribuzioni come

$$y = h * g, \qquad \text{con} \qquad (P(D)h :=)\ \alpha D^2 h + \beta D h + \gamma h = \delta. \tag{4.24}$$

Per via della (4.22), h è detta una *soluzione fondamentale* dell'equazione differenziale data. Questa non è unica, poiché è data a meno della somma di una qualsiasi soluzione dell'equazione omogenea. Tuttavia queste ultime non sono causali, quindi per il problema di Cauchy (4.1)

$$\begin{aligned} &h \ \text{ è l'unica soluzione fondamentale in } \bar{D}_{\mathcal{L}}\,(\subset \mathcal{D}'),\\ &u = h * g \ \text{ è l'unica soluzione in } \bar{D}_{\mathcal{L}}, \forall g \in \mathcal{S}'. \end{aligned} \tag{4.25}$$

[16] Anche se spesso non lo preciseremo, tutte le funzioni del tempo sono definite per quasi ogni $t \in \mathbf{R}$, e quelle della frequenza sono definite per quasi ogni s in un semipiano destro di $\mathbf{C}$.

[17] Se i dati ai limiti non sono omogenei, ci si può comunque ricondurre ad un sistema lineare inglobando i dati iniziali nel termine forzante f, pur di svolgere i conti nell'ambito delle distribuzioni.

Si noti la differenza rispetto al discorso svolto per il problema posto in tutto $\mathbf{R}$ usando la trasformazione di Fourier, cf. (3.10).

Due Esempi. Si fissi un $k > 0$, si prescrivano i dati $y_0, y_1 \in \mathbf{C}$ ed $f \in D_{\mathcal{L}}$, e si considerino i problemi ai valori iniziali (4.1) rispettivamente governati dalle equazioni differenziali

$$u'' - k^2 u = f(t), \qquad u'' + k^2 u = f(t),$$

(quest'ultima è l'equazione del moto armonico); ad esse sono rispettivamente associati gli operatori

$$P_1(D) := D^2 - k^2 I, \qquad P_2(D) := D^2 + k^2 I \qquad (I\text{: operatore identità}),$$

con polinomi caratteristici

$$P_1(s) := s^2 - k^2, \qquad P_2(s) := s^2 + k^2 \qquad (s \in \mathbf{C}),$$

le cui radici sono rispettivamente

$$s_{11}, s_{12} = \pm k, \qquad s_{21}, s_{22} = \pm ik.$$

Pertanto la soluzione generale $y^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ del corrispondente problema (4.1) ha la forma (4.9) con ascissa di convergenza

$$\lambda(y^{(1)}) \leq \max\{k, \lambda(f)\}, \qquad \lambda(y^{(2)}) \leq \max\{0, \lambda(f)\},$$

e funzione di trasferimento in tempo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P_1(s)}\right) &= \frac{1}{2k}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-k} - \frac{1}{s+k}\right) = \frac{\sinh kt}{k} H(t), \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P_2(s)}\right) &= \frac{1}{2ik}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-ik} - \frac{1}{s+ik}\right) = \frac{\sin kt}{k} H(t). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Si noti che la prima di queste due funzioni è una combinazione lineare di esponenziali reali, quindi ha andamento esponenziale per $t \to +\infty$ ed appartiene a $\mathcal{D}' \backslash \mathcal{S}'$; per contro la seconda è una combinazione lineare di esponenziali complessi, quindi ha andamento oscillante ed appartiene a $\mathcal{S}'$.

Equazioni di Ordine Superiore. La trattazione precedente può essere estesa a problemi ai valori iniziali per equazioni alle derivate ordinarie di ordine $M \geq 1$ qualsiasi.

Siano $\alpha_0, ..., \alpha_M, y_0, ..., y_{M-1} \in \mathbf{C}$ $(\alpha_M \neq 0)$, $f \in D_{\mathcal{L}}$, e si cerchi $y : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{C}$ tale che

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{M} \alpha_m D^m y = f(t) & \text{per } t > 0 \\ D^m y(0) = y_m & \text{per } m = 0, ..., M-1. \end{cases} \tag{4.27}$$

Anche qui supponiamo $y \in D_{\mathcal{L}}$, ed applichiamo la trasformazione di Laplace all'equazione (4.27). Grazie al Teorema di Derivazione

$$\mathcal{L}(D^m y) = s^m \mathcal{L}(y) - \sum_{n=0}^{m-1} s^{m-1-n} D^n y(0) \qquad \text{in } \mathcal{D}', \ \text{per } m = 1, ..., M; \tag{4.28}$$

ponendo $Y := \mathcal{L}(y)$ e $F := \mathcal{L}(f)$, la (4.27) allora fornisce

$$\sum_{m=0}^{M} \alpha_m s^m Y(s) - \sum_{m=0}^{M} \alpha_m \sum_{n=0}^{m-1} s^{m-1-n} y_n = F(s) \qquad \text{per } \operatorname{Re}(s) > \max\{M, \lambda(f)\}. \tag{4.29}$$

Come abbiamo visto per l'equazione del secondo ordine, anche qui si sarebbe potuto formulare il problema di Cauchy come una singola equazione del senso delle distribuzioni, e naturalmente si sarebbe pervenuti alla stessa equazione.

Posto

$$\begin{aligned} P(s) &:= \sum_{m=0}^{M} \alpha_m s^m \qquad \textit{(polinomio caratteristico)}, \\ \Phi(s) &:= \sum_{m=0}^{M} \alpha_m \sum_{n=0}^{m-1} s^{m-1-n} y_n, \end{aligned} \tag{4.30}$$

possiamo riscrivere l'equazione (4.29) come

$$P(s)Y(s) = \Phi(s) + F(s) \qquad \text{per } \operatorname{Re}(s) > \lambda(f). \tag{4.31}$$

Denotando con $s_1, ..., s_N \in \mathbf{C}$ le radici (eventualmente ripetute) del polinomio caratteristico, abbiamo

$$P(s) \neq 0 \qquad \text{per } \operatorname{Re}(s) > M := \max\{\operatorname{Re}(s_i) : i = 1, ..., N\}.$$

L'equazione (4.29) è quindi equivalente a

$$Y(s) = \frac{\Phi(s)}{P(s)} + \frac{F(s)}{P(s)} \qquad \text{per } \operatorname{Re}(s) > \max\{M, \lambda(f)\}.$$

Grazie al Teorema 1.13 di antitrasformabilità entrambi gli addendi di destra sono antitrasformabili; mediante tale operazione otteniamo la soluzione del problema (4.27):

$$\begin{aligned} y = \mathcal{L}^{-1}(Y) \quad &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Phi(s)}{P(s)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{P(s)}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Phi(s)}{P(s)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P(s)}\right) * f \qquad \text{in } \mathbf{R}^+, \end{aligned} \tag{4.32}$$

somma della risposta libera con quella forzata. La funzione y ha ascissa di convergenza $\lambda(y) \leq \max\{M, \lambda(f)\}$; questo giustifica le precedenti operazioni.

La precedente discussione può essere estesa in diverse direzioni: ad esempio, ai problemi di Cauchy per sistemi di equazioni differenziali, alle equazioni ed ai sistemi differenziali con ritardo, ecc..

*** Sistemi di Equazioni Lineari del Primo Ordine.** Sia N un intero ≥ 1, A una matrice $A \in \mathbf{C}^{N\times N}$, $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{C}^N$ una funzione localmente integrabile, e $u^0 \in \mathbf{C}^N$. Si consideri il seguente problema di Cauchy vettoriale del primo ordine:

$$\begin{cases} D_t u = A \cdot u + f \qquad \text{in } \mathbf{R}^+, \\ u(0) = u^0. \end{cases} \tag{4.33}$$

Estendendo u e f a funzioni vettoriali causali, questo problema è equivalente alla singola equazione

$$D_t u = A \cdot u + f + u^0 \delta \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R})^N. \tag{4.34}$$

Supponiamo che sia f (nota) che u (incognita) siano Laplace-trasformabili, e poniamo $U = \mathcal{L}(u)$, $F = \mathcal{L}(f)$. Applicando la trasformazione di Laplace all'equazione (4.34) otteniamo

$$(sI - A) \cdot U(s) = F(s) + u^0 \qquad \text{per } \operatorname{Re}(s) > \max\{\lambda(u), \lambda(f)\}, \tag{4.35}$$

ovvero, definendo la matrice *risolvente* $R(s) = (sI - A)^{-1}$,

$$U(s) = R(s) \cdot [F(s) + u^0] \qquad \text{per } \operatorname{Re}(s) \textit{ abbastanza grande.} \tag{4.36}$$

Più precisamente, definiti gli autovalori complessi (eventualmente ripetuti) $s_1, ..., s_N$ della matrice A, la (4.36) vale per $\operatorname{Re}(s) > \max\{\lambda(u), \lambda(f), \max_{j=1,...,N} \operatorname{Re}(s_j)\}$.

Introduciamo ora la funzione matriciale antitrasformata $S = \mathcal{L}^{-1}(R) : \mathbf{R} \to \mathbf{C}^{N\times N})$, ovvero la soluzione del problema

$$(sI - A)^{-1} = [\mathcal{L}(S(\cdot))](s) \qquad \text{per } \operatorname{Re}(s) > \max_{j=1,...,N}\{\operatorname{Re}(s_j)\}. \tag{4.37}$$

Antitrasformando la (4.36), perveniamo alla classica formula di variazione delle costanti:

$$u(t) = S(t) * f(t) + S(t) \cdot u^0 = \int_0^t S(t-\tau) \cdot f(\tau)\, d\tau + S(t) \cdot u^0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{4.38}$$

La funzione S rappresenta il *semigruppo* definito dalla matrice A. La (4.45) può essere allora interpretata affermando che "il risolvente $(sI + A)^{-1}$ del semigruppo $S(t)$ associato alla matrice A coincide con la trasformata di Laplace del semigruppo stesso."

Si noti che, estendendo una formula nota nel caso scalare, la (4.45) fornisce

$$S(t) = e^{At} H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} H(t) \ (\in \mathbf{C}^{N\times N}) \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{4.39}$$

*** Sistemi di Equazioni Lineari di Ordine Superiore.** Siano N, A, f come sopra, $m \in \mathbf{N}$, $a_n, u^n \in \mathbf{C}$ per $n = 0, ..., m-1$ ($a_m \neq 0$). Si consideri il seguente problema di Cauchy vettoriale di ordine m:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^m a_n D^n u(t) = A \cdot u(t) + f(t) & \text{per } t > 0, \\ D^n u(0) = u^n & \text{per } n = 0, ..., m-1. \end{cases} \tag{4.40}$$

Estendendo u e f a funzioni vettoriali causali, questo problema è equivalente alla singola equazione

$$\sum_{n=0}^{m} a_n D^n u(t) = A \cdot u(t) + f(t) + \sum_{n=0}^{m-1} a_n u^n D^{m-1-n} \delta \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R})^N. \tag{4.41}$$

Supponiamo che sia f (nota) che u (incognita) siano Laplace-trasformabili, e poniamo $U = \mathcal{L}(u)$, $F = \mathcal{L}(f)$, e definiamo il polinomio caratteristico $P(s)$ ed il polinomio Φ come segue:

$$P(s) = \sum_{n=0}^{m} a_n s^n \quad \forall s \in \mathbf{C}, \qquad \Phi(s) = \sum_{n=1}^{m} \sum_{h=0}^{n-1} a_n u^h s^{n-h-1}. \tag{4.42}$$

Applicando la trasformazione di Laplace all'equazione (4.42) otteniamo

$$[P(s)I - A] \cdot U(s) = F(s) + \Phi(s) \qquad \text{per } \operatorname{Re}(s) > \max\{\lambda(u), \lambda(f)\}, \tag{4.43}$$

ovvero, definendo la matrice $R(s) = [P(s)I - A]^{-1}$,

$$U(s) = R(s) \cdot [F(s) + \Phi^0(s)] \qquad \text{per } \mathrm{Re}(s) \text{ \textit{abbastanza grande.}} \tag{4.44}$$

Introduciamo la funzione matriciale antitrasformata $S = \mathcal{L}^{-1}(R) : \mathbf{R} \to \mathbf{C}^{N\times N}$), ovvero la soluzione del problema

$$[P(s)I - A]^{-1} = [\mathcal{L}(S(\cdot))](s) \qquad \text{per } \mathrm{Re}(s) \text{ \textit{abbastanza grande.}} \tag{4.45}$$

Antitrasformando la (4.36), perveniamo a

$$u(t) = S(t) * f(t) + S(t) \cdot \Phi^0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{4.46}$$

Questo approccio può essere esteso anche a PDEs lineari di evoluzione, rappresentando un operatore diffferenziale stazionario mediante un operatore A in uno spazio di dimensione infinita (tipicamente uno spazio di Banach).