

# Serie di Fourier

A. Visintin – Fourier Analysis, a.a. 2015-16

In questo capitolo introduciamo le funzioni periodiche, gli sviluppi in serie di Fourier <sup>1</sup> in forma di seni e coseni per le funzioni di periodo  $2\pi$ , e ne identifichiamo i coefficienti. Affrontiamo quindi la relazione tra la funzione e la sua serie di Fourier, e formuliamo un teorema di convergenza. Esaminiamo anche come alcune proprietà della funzione (parità, realtà, ecc.) si traducono in termini dei suoi coefficienti di Fourier. Introduciamo poi la rappresentazione esponenziale delle serie di Fourier, ed estendiamo la trattazione a funzioni di periodo qualsiasi. Successivamente assumiamo il punto di vista dell'Analisi Funzionale, e trattiamo la convergenza delle serie trigonometriche nello spazio di Hilbert  $L^2(-\pi, \pi)$ . Mostriamo poi l'uso delle serie di Fourier per la risoluzione di certi problemi ai limiti per equazioni alle derivate parziali, mediante il metodo di separazione delle variabili. Infine illustriamo alcuni classici aspetti analitici di questa teoria.

**Nota.** Il simbolo [Ex] indica che la giustificazione non è difficile, ed è lasciata come esercizio. Il simbolo [] invece indica che la giustificazione non è facile ed è omessa. Il simbolo \* è usato per indicare punti che possono essere omessi (oltre che per il coniugio...).

## 1 Funzioni Periodiche

Fissata una costante  $T > 0$ , si dice che una funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  è *periodica di periodo  $T$*  (o più brevemente  *$T$ -periodica*) <sup>2</sup> se

$$f(t + T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Ovviamente, una funzione periodica di periodo  $T$  è pure periodica di periodo  $kT$  per ogni intero  $k > 1$ . Ogni funzione periodica continua non costante ha un periodo minimo, detto *periodo fondamentale*; ogni altro periodo è multiplo intero di quello fondamentale. Ad esempio le funzioni seno, coseno, esponenziale immaginario (ovvero  $t \mapsto e^{it}$ ) sono periodiche di periodo fondamentale  $2\pi$ ; la funzione tangente è pure periodica di periodo  $2\pi$ , ma ha periodo fondamentale  $\pi$ .

È naturale interpretare la *variabile indipendente*  $t$  come tempo, e questo è necessariamente reale. Lo stato  $f(t)$  (ovvero la *variabile dipendente*) sarà invece supposto complesso. Comunque si può anche interpretare  $t$  come una variabile spaziale (pure necessariamente reale), ed allora avrà senso estendere i risultati di questa sezione al caso in cui  $t$  è un vettore di  $\mathbf{R}^N$ . Gran parte dei risultati di questo capitolo possono essere facilmente estesi al caso di  $t \in \mathbf{R}^N$ , con  $f$  periodica *multi-periodica*, ovvero periodica rispetto ad ogni componente di  $t$ .

Siano  $a \in \mathbf{R}$  e  $T > 0$ ; una qualsiasi funzione  $f : [a, a + T[ \rightarrow \mathbf{C}$  può essere estesa in uno ed un solo modo ad una funzione  $T$ -periodica  $\tilde{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ , detta appunto *estensione  $T$ -periodica* di  $f$ . Poiché ogni numero reale può essere rappresentato nella forma  $t + nT$  per  $t \in [a, a + T[$  e  $n \in \mathbf{Z}$  opportuni, basta porre  $\tilde{f}(t + nT) := f(t)$  per ogni  $t$  ed  $n$ . È quindi equivalente studiare una funzione  $T$ -periodica  $f$  su tutto  $\mathbf{R}$  o su un qualsiasi intervallo di lunghezza  $T$ ; inoltre l'integrale  $\int_a^{a+T} f(t) dt$  è indipendente da  $a \in \mathbf{R}$ , se tale integrale esiste per almeno un valore di  $a$ . [Es]

<sup>1</sup> Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).

<sup>2</sup> Si definiscono anche la *frequenza*  $\nu := 1/T$  e la *pulsazione*  $\omega := 2\pi\nu$ . La frequenza è misurata in cicli nell'unità' di tempo, la pulsazione in radianti nell'unità' di tempo.

Spesso si identifica una funzione periodica con la sua restrizione ad un intervallo di lunghezza pari al suo periodo. Questa rappresentazione presenta alcuni vantaggi; ad esempio, la funzione nulla è l'unica funzione periodica di  $L^2(\mathbf{R})$ , mentre  $L^2(a, a + T)$  comprende una gran quantità di funzioni. Si noti comunque che per ogni funzione  $T$ -periodica  $f$

$$\tilde{f} \in C^0(\mathbf{R}) \quad \Leftrightarrow \quad f \in C^0([a, a + T[) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow (a+T)^-} f(t) = f(a). \quad (1.1)$$

Si dice che una funzione  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{C}$  è *continua a tratti* se è continua in tutti i punti salvo al più in un numero finito, nei quali comunque esistono finiti sia il limite sinistro che quello destro; si chiede anche che esistano finiti il limite destro in  $a$  e quello sinistro in  $b$ . Si dice che una funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  è continua a tratti se lo è in ogni intervallo. Si noti che una funzione continua a tratti è limitata, quindi integrabile, in ogni intervallo. Ad esempio, l'estensione  $\pi$ -periodica della funzione  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbf{R} : t \mapsto t$  è continua a tratti, mentre la funzione tangente non lo è.

Analogamente si dice che una funzione  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{C}$  è *monotona a tratti* se esiste un insieme finito di punti  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_N = b$  tali che  $f$  è o non crescente o non decrescente in ogni intervallo  $]t_n, t_{n+1}[$  ( $n = 0, \dots, N - 1$ ) (questo comportamento può variare da intervallo a intervallo). Si dice anche che una funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  è monotona a tratti se lo è in ogni intervallo. Ad esempio, le funzioni seno e coseno sono monotone a tratti su  $] - \pi, \pi[$  ed anche su tutto  $\mathbf{R}$ ; la funzione  $f : t \mapsto t \sin(1/t)$  (con  $f(0) = 0$ ) è monotona a tratti su ogni intervallo  $[a, 2\pi[$  con  $0 < a < 2\pi$ , ma non su tutto  $]0, 2\pi[$  (e tanto meno su tutto  $\mathbf{R}$ ).

Si noti che le funzioni periodiche di un certo periodo costituiscono uno spazio lineare, e che lo stesso vale sia per le funzioni continue a tratti che per quelle monotone a tratti.

## 2 Rappresentazione Trigonometrica delle Serie di Fourier ed Identificazione dei Coefficienti

In questo paragrafo assumiamo che  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  sia una funzione  $2\pi$ -periodica, e la identifichiamo con la sua restrizione ad un qualsiasi intervallo di lunghezza  $2\pi$ , ad esempio all'intervallo  $[-\pi, \pi]$ .

Lo sviluppo in serie di Fourier si applica a funzioni periodiche. Qui assumiamo che il periodo sia uguale a  $2\pi$  per semplificare certi conti; poi estenderemo facilmente la trattazione a funzioni di periodo qualsiasi.

Studieremo la possibilità di approssimare  $f$  mediante una successione di funzioni della forma

$$S_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad \forall t \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N},$$

dette *polinomi trigonometrici* (di ordine  $n$ ) per motivi che saranno chiariti più avanti. Poniamo poi

$$S(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad (2.1)$$

detta *serie trigonometrica* o *serie di Fourier formale*. Parleremo poi di serie di Fourier vera e propria (non formale) se questa serie converge, in un senso da specificare volta per volta: o dappertutto,

o quasi dappertutto, o nello spazio di Hilbert  $L^2(-\pi, \pi)$ , ecc..<sup>3</sup> Pertanto per serie di Fourier si intende solo lo sviluppo *in seni e coseni* di una funzione data.

Con terminologia tratta dall'acustica, il termine  $a_0/2$  è detto *componente continua* del segnale;  $a_1 \cos t + b_1 \sin t$  è detto *armonica fondamentale*; gli addendi corrispondenti agli altri  $k$  sono detti *armoniche superiori*.

Data una funzione  $f$ , ci chiediamo se  $S = f$  in  $\mathbf{R}$  per un'opportuna scelta dei coefficienti  $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$  e  $\{b_1, b_2, \dots\}$ .<sup>5</sup> A questo proposito si pongono diversi problemi:

(i) Quali funzioni ( $2\pi$ -periodiche su tutto  $\mathbf{R}$  o definite solo su  $[-\pi, \pi]$ ) ammettono una rappresentazione in serie di Fourier?

(ii) In che senso è da intendersi la convergenza della serie: puntuale, uniforme, in  $L^2(-\pi, \pi)$ , o altro?

(iii) Supposto  $S = f$ , i coefficienti  $\{a_k\}$  e  $\{b_k\}$  sono individuati da  $f$ ?

(iv) In caso affermativo, come si possono esprimere i coefficienti in termini di  $f$ ?

Le prime due questioni riguardano la regolarità di  $f$  (ovvero un aspetto *qualitativo*); le altre due coinvolgono invece degli aspetti *quantitativi*, e quindi sono più vicine alle esigenze applicative.

Incominciamo proprio da queste ultime due questioni. Mostriamo che i coefficienti sono individuati da  $f$ , e per calcolarli useremo le seguenti identità.

**Lemma 2.1.** (*di Ortogonalità*)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos lt \, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq l \\ \pi & \text{se } k = l \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } k = l = 0 \end{cases} \quad \forall k, l \in \mathbf{N}, \quad (2.2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \sin lt \, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq l \\ \pi & \text{se } k = l \neq 0 \\ 0 & \text{se } k = l = 0 \end{cases} \quad \forall k, l \in \mathbf{N}, \quad (2.3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \sin lt \, dt = 0 \quad \forall k, l \in \mathbf{N}. \quad (2.4)$$

**Dimostrazione.** Grazie alla formula di Eulero,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos lt \, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} \frac{e^{ilt} + e^{-ilt}}{2} \, dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i(k+l)t} + e^{i(k-l)t} + e^{i(\ell-k)t} + e^{-i(k+l)t}) \, dt \quad \forall k, l \in \mathbf{N}; \end{aligned}$$

dall'identità fondamentale

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imt} \, dt = \begin{cases} 2\pi & \text{se } m = 0 \\ 0 & \text{se } m \neq 0 \end{cases} \quad \forall m \in \mathbf{N}, \quad (2.5)$$

<sup>3</sup> Una certa ambiguità è insita nel termine *serie*. Questo indica sia la successione delle somme parziali che il loro eventuale limite. Qui ci riferiamo alla successione delle somme parziali, dal momento che il limite può anche non esistere. (In ogni caso, trattandosi di funzioni, occorrerebbe specificare il senso del limite, ovvero il tipo di convergenza a cui si fa riferimento.)

<sup>4</sup> Questa denominazione non è delle più felici, poiché anche gli altri addendi sono continui.

<sup>5</sup> La scrittura  $S = f$  presuppone la convergenza della serie stessa, in un senso ancora da specificare.

consegue allora la (2.2). La dimostrazione delle (2.3) e (2.4) è analoga. □

Secondo l'impostazione dell'analisi funzionale, le (2.2)—(2.4) esprimono l'ortogonalità nel senso del prodotto scalare di  $L^2(-\pi, \pi)$  di ogni coppia di funzioni dell'insieme

$$\{\sin kt, \cos kt : k \in \mathbf{N}\} = \{0, 1, \sin t, \cos t, \dots, \sin kt, \cos kt, \dots\}.$$

(Torneremo su questo aspetto più avanti.) Queste funzioni sono continue, ed appartengono a  $L^p(-\pi, \pi)$  per ogni  $p \in [1, +\infty]$ .

Siamo ora in grado di mostrare che i coefficienti di Fourier di una funzione  $f$  sono determinati univocamente da  $f$ , e possiamo esprimere i coefficienti  $\{a_k\}$  e  $\{b_k\}$  in termini di  $f$ .<sup>6</sup>

**Teorema 2.2.** *Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  una funzione  $2\pi$ -periodica continua. Se la serie (2.1) converge uniformemente a  $S = f$ , allora*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt (= a_k(f)) \quad \text{per } k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt (= b_k(f)) \quad \text{per } k = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

**Dimostrazione.** In seguito all'ipotesi di convergenza uniforme, possiamo scambiare le operazioni di serie e di integrazione. Grazie al lemma di ortogonalità abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos \ell t \, dt &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \ell t \, dt + \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right) \cos \ell t \, dt \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \ell t \, dt + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos \ell t \, dt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cos \ell t \, dt \\ &= a_\ell \pi \quad \text{per } \ell = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

(Si noti che questa formula vale anche per  $\ell = 0$ : è proprio per ottenere questo che abbiamo scritto il termine costante della serie nella forma  $a_0/2$ .)

Analogamente si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin \ell t \, dt = b_\ell \pi \quad \text{per } \ell = 1, 2, \dots \quad \square$$

In quest'ultimo teorema abbiamo richiesto che la funzione  $f$  fosse continua, poiché la dimostrazione si basa sulla convergenza uniforme; tuttavia le formule (2.6) e (2.7) hanno senso anche per  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ . Questo lascia sperare di poter rappresentare in serie di Fourier anche funzioni meno regolari, ad esempio continue a tratti, o soltanto  $L^p$  per un  $p \in [1, +\infty]$ .

Inoltre la trasformazione  $\Phi : f \mapsto (\{a_k(f)\}, \{b_k(f)\})$  opera (ad esempio) da  $L^1(-\pi, \pi)$  a  $\ell^\infty$  (lo spazio di Banach delle successioni limitate  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ , dotato della norma del sup). Si verifica facilmente che  $\Phi$  è lineare e continua. [Ex] In particolare

$$\Phi(if) = i\Phi(f) \quad \forall f \in L^1(-\pi, \pi); \quad (2.9)$$

quindi se  $f$  è a valori reali (immaginari, risp.), allora i suoi coefficienti di Fourier  $\{a_k(f)\}, \{b_k(f)\}$  sono reali (immaginari, risp.).

---

<sup>6</sup> In teoria dei segnali le successioni dei coefficienti di Fourier  $\{a_k\}$  e  $\{b_k\}$  sono dette lo *spettro* del segnale  $f$ .

Per una generica funzione  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ , denoteremo con  $S_f$  la serie trigonometrica corrispondente ai coefficienti di Fourier  $\{a_k(f)\}$  e  $\{b_k(f)\}$  definiti in (2.6) e (2.7),

$$S_f(t) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(f) \cos kt + b_k(f) \sin kt], \quad (2.10)$$

e con  $S_{f,n}$  il corrispondente polinomio trigonometrico di ordine  $n$ :

$$S_{f,n}(t) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k(f) \cos kt + b_k(f) \sin kt]. \quad (2.11)$$

Ovviamente la somma finita  $S_{f,n}$  non presenta alcun problema di convergenza. Per contro, la serie di Fourier formale  $S_f$  di  $f$  può convergere puntualmente o meno.

In un certo senso  $S : f \mapsto S_f$  è la trasformazione inversa della  $\Phi$ .

**Osservazione.** La serie di Fourier formale non è l'unica rappresentazione del tipo di Fourier. Nel paragrafo ?? vedremo alcune rappresentazioni alternative della funzione originaria (quella che ha generato la famiglia dei coefficienti  $\{a_k\}$  e  $\{b_k\}$ ).

Nell'ultimo mezzo secolo sono state poi studiate altre rappresentazioni alternative, che non usano i coefficienti di Fourier e si discostano alquanto dalla teoria qui sviluppata. In particolare le celebri *wavelets* sono particolarmente utili ad esempio nella compressione dei segnali.

### 3 Convergenza della Serie di Fourier

In questo paragrafo forniamo delle condizioni sufficienti (sebbene non necessarie) per la convergenza della serie trigonometrica (2.1), e discutiamo l'uguaglianza  $S_f = f$ .

**Teorema 3.1.** (*di Convergenza di Dirichlet*) [ ] Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  una funzione  $2\pi$ -periodica, continua a tratti, e si supponga che  $f'$  esista e sia continua a tratti, oppure che  $f$  sia monotona a tratti. Si ponga <sup>7</sup>

$$\tilde{f}(t) := \frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)] \quad \forall t \in \mathbf{R}. \quad (3.1)$$

Allora la serie di Fourier formale di  $f$  converge puntualmente alla funzione  $\tilde{f}$ ; ovvero, definendo  $a_k = a_k(f)$  e  $b_k = b_k(f)$  per ogni  $k$  come in (2.6) e (2.7),

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) (= S_f(t)) \quad \forall t \in \mathbf{R}. \quad (3.2)$$

Se  $f$  è anche continua in un intervallo  $[a, b] \subset \mathbf{R}$ , allora la sua serie di Fourier converge uniformemente a  $\tilde{f} = f$  in  $[a, b]$ .

Essendo  $\tilde{f} = f$  in ogni punto in cui  $f$  è continua, la (3.2) implica  $S_f = f$  in ogni punto in cui  $f$  è continua, quindi quasi ovunque in  $]-\pi, \pi[$  per ogni funzione continua a tratti.

**Osservazioni.** (i) Mediante la serie di Fourier formale si può approssimare qualsiasi funzione periodica ad esempio di classe  $C^1$  (quindi soddisfacente le ipotesi del Teorema 3.1) con una serie

<sup>7</sup> Con notazione standard,  $f(t \pm 0) := \lim_{y \rightarrow t \pm} f(y)$ .

di funzioni di classe  $C^\infty$ . Questo può apparire sorprendente, poiché per ogni  $k$  una somma finita di funzioni di classe  $C^k$  è essa pure di classe  $C^k$ , per ogni  $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ . Tuttavia quest'ultima affermazione in generale non vale per le serie di funzioni, ovvero per le somme infinite; infatti la derivata di una serie di funzioni è uguale alla serie delle derivate solo sotto opportune ipotesi. Ad esempio se  $f$  è di classe  $C^1$ , allora in seguito al Teorema 3.1 la sua serie di Fourier converge uniformemente a  $f$ , ma non è detto che la serie di Fourier formale di  $f'$  (che è solo di classe  $C^0$  a priori) converga a  $f'$ .

(ii) Per le (2.6) e (2.7), ciascun coefficiente di Fourier dipende da  $f$  attraverso un'integrazione, e quindi non risente del comportamento di  $f$  in specifici punti; pertanto, se si modifica  $f$  solo in un punto  $\bar{t}$  (o più in generale in un sottoinsieme di  $\mathbf{R}$  di misura nulla),  $S_f(\bar{t})$  non può cambiare.

Il Teorema di convergenza 3.1 ci dice che  $f = S_f$  nei punti in cui  $f$  è continua. I motivi per cui questo avvenga non sono ovvi: per rendersene conto occorrerebbe esaminare la dimostrazione. Tuttavia è chiaro che per quei punti non si può ripetere il ragionamento appena esposto, perchè modificando la  $f$  in un punto ivi verrebbe meno la continuità.

(iii) Ciascun coefficiente di Fourier dipende dal comportamento globale di  $f$ , per via delle (2.6) e (2.7). Tuttavia, a differenza di quanto ci si potrebbe aspettare a priori, per ogni  $t \in ]-\pi, \pi[$  il valore della somma  $S_f(t)$  dipende solo dal comportamento di  $f$  in prossimità di  $t$ . Più precisamente si ha il seguente risultato.

**Corollario 3.2.** (*Principio di localizzazione di Riemann*) Se  $f_1, f_2 : ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbf{C}$  sono due funzioni continue tali che  $f_1 = f_2$  in un intervallo  $]a, b[ \subset ]-\pi, \pi[$ , allora

$$S_{f_1, n}(t) - S_{f_2, n}(t) \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty, \forall t \in ]a, b[.$$

Si noti che qui si richiede solo la continuità; quindi le due serie formali potrebbero non convergere.

In altri termini, se due funzioni hanno coefficienti di Fourier (e la continuità lo garantisce), allora le loro serie di Fourier formali hanno lo stesso comportamento in quell'aperto. Questo può apparire un po' sorprendente, poiché i coefficienti di Fourier dipendono dal comportamento globale della funzione, ma è una diretta conseguenza del teorema di convergenza applicato alla funzione  $f_1 - f_2$ .

(iv) Nei pressi dei punti di discontinuità di  $f$ , per ogni intero  $n \geq 1$  la somma parziale  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$  presenta delle oscillazioni attorno al valore limite. Per  $n \rightarrow \infty$  queste oscillazioni diventano sempre più piccole, in modo da consentire la convergenza uniforme della serie di Fourier in ogni intervallo in cui  $f$  è continua, coerentemente col Teorema 3.1. In prossimità dei punti di discontinuità di  $f$  le oscillazioni comunque non si smorzano.

Si consideri ad esempio la funzione segno nell'intervallo  $] -\pi, \pi[$ :

$$f(t) := -1 \quad \text{se } -\pi < t < 0, \quad f(0) := 0, \quad f(t) := 1 \quad \text{se } 0 < t < \pi.$$

allora  $S_{f, n} \rightarrow f$  puntualmente in  $] -\pi, \pi[$ , e la convergenza è uniforme in ogni sotto-intervallo chiuso che non contiene lo 0. Tuttavia si può dimostrare che per ogni  $n$

$$\begin{aligned} \exists t_n \in ]0, \pi[: \quad S_{f, n}(t_n) - 1 &\simeq 0.18 \quad \text{per } n \text{ grande,} \\ \exists t'_n \in ]-\pi, 0[: \quad S_{f, n}(t'_n) + 1 &\simeq -0.18 \quad \text{per } n \text{ grande;} \end{aligned} \tag{3.3}$$

per quanto osservato, sia  $t_n$  che  $t'_n$  convergono a 0 per  $n \rightarrow \infty$ . [] Questo è noto come il *fenomeno di Gibbs*, e si presenta nei pressi di ogni punto di discontinuità.

\* (v) La continuità di  $f$  non basta ad assicurare la convergenza della serie trigonometrica  $S_f$ : occorrono delle ipotesi aggiuntive su  $f$ , ad esempio quelle del Teorema 3.1 o altre condizioni più o meno elaborate. Elenchiamo schematicamente alcuni dei risultati più significativi:

— 1873: Du Bois Reymond costruisce una  $f \in C^0([-\pi, \pi])$  tale che  $S_f$  non converge per  $t = 0$ .

— 1926: Kolmogorov costruisce una  $f \in L^1(-\pi, \pi)$  tale che  $S_f$  non converge in alcun punto.

— 1966: Kahane and Katznelson dimostrano che per qualsiasi insieme di misura nulla  $A \subset [-\pi, \pi]$  esiste  $f \in C^0([-\pi, \pi])$  tale che  $S_f$  non converge in alcun punto di  $A$ . (Questo ovviamente generalizza il risultato di Du Bois Reymond.)

— 1966: Carleson dimostra che per ogni  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  (in particolare quindi per ogni  $f \in C^0([-\pi, \pi])$ )  $S_f$  converge ad  $f$  in quasi tutti i punti.<sup>8</sup>

— 1967: Hunt estende il teorema di Carleson alle  $f \in L^p(-\pi, \pi)$ , per ogni  $p > 1$ . ( $p = 1$  resta escluso grazie al risultato di Kolmogorov.)

## 4 Funzioni Pari e Dispari

In questo paragrafo trattiamo degli aspetti essenzialmente algoritmici; supponiamo quindi che  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  sia una funzione così regolare da garantire che  $f = S_f$ . Ad esempio in base al Teorema 3.1 di convergenza questo vale se  $f$  è una funzione  $2\pi$ -periodica di classe  $C^1$ .

Si dice che

$$\begin{aligned} f \text{ è pari} & \quad \Leftrightarrow \quad f(-t) = f(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}, \\ f \text{ è dispari} & \quad \Leftrightarrow \quad f(-t) = -f(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

(Queste definizioni valgono anche se  $f$  è definita solo in un sottoinsieme di  $\mathbf{R}$  simmetrico rispetto all'origine.) Ad esempio, la funzione potenza  $t \mapsto t^n$  è pari se  $n$  è pari, mentre è dispari se  $n$  è dispari. Il coseno è pari, seno e tangente sono dispari; lo stesso vale per le corrispondenti funzioni iperboliche. È immediato verificare che il prodotto di due funzioni pari o di due funzioni dispari è pari, mentre il prodotto di una funzioni pari ed una dispari è dispari (il che può forse spiegare questa terminologia).

Ogni funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  può essere decomposta nella somma di una funzione pari ed una dispari, dette rispettivamente *parte pari* e *parte dispari* di  $f$ :

$$\begin{aligned} f_p(t) & := \frac{f(t) + f(-t)}{2} \quad (\text{pari}) \\ f_d(t) & := \frac{f(t) - f(-t)}{2} \quad (\text{dispari}) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad f(t) = f_p(t) + f_d(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{4.2}$$

Si noti che  $f$  è pari (dispari, risp.) sse  $f_d \equiv 0$  ( $f_p \equiv 0$ , risp.).<sup>9</sup> Poiché il coseno è pari ed il seno è dispari, è facile verificare che

$$f_p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt, \quad f_d(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

<sup>8</sup> Questo risultato è basato su una dimostrazione particolarmente complessa, ed è valso a Carleson il prestigioso premio Abel nel 2006.

<sup>9</sup>  $g \equiv 0$  significa che  $g$  è identicamente nulla, ovvero  $g(t) = 0$  per ogni  $t$ .

(ricordiamo che stiamo supponendo che sia  $f = S_f$ ); queste sono dette rispettivamente *serie di coseni* e *serie di seni*. Quindi

$$\begin{aligned} f \text{ pari} &\Leftrightarrow f(t) = f_p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt \quad \forall t \in \mathbf{R}, \\ f \text{ dispari} &\Leftrightarrow f(t) = f_d(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt \quad \forall t \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} f \text{ pari} &\Leftrightarrow a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = 0 \quad \forall k, \\ f \text{ dispari} &\Leftrightarrow a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad \forall k. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Per verificare queste ultime due affermazioni basta notare che i rispettivi integrandi sono pari, e quindi i corrispondenti integrali estesi a  $[0, \pi]$  sono uguali alla metà degli integrali su  $[-\pi, \pi]$ .

**Esempio 1.** Si consideri la funzione  $[-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbf{R} : t \mapsto t$ , e sia  $f$  la sua estensione  $2\pi$ -periodica a tutto  $\mathbf{R}$ . La funzione  $f$  è dispari, quindi può essere rappresentata come serie di soli seni. Essendo

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin kt \, dt = -\frac{2}{k} \cos k\pi = (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \quad \text{per } k = 1, 2, \dots,$$

la sua serie di Fourier formale è

$$S_f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kt = 2 \sin t - \sin 2t + \frac{2}{3} \sin 3t + \dots \quad \forall t \in ]-\pi, \pi[.$$

Per applicare il Teorema 3.1 di convergenza occorre ora valutare la regolarità della funzione: sia  $f$  che  $f'$  sono continue a tratti, ed  $f$  ha dei salti solo in  $k\pi$  con  $k \in \mathbf{Z}$ . Quindi

$$f(t) = S_f(t) \quad \forall t \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}, \quad f(t) = 0 \quad \forall t \in \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}.$$

La funzione  $f$  è continua in ogni intervallo  $[a, b] \subset ]-\pi, \pi[$ , ma non in tutto  $[-\pi, \pi]$ ; pertanto la serie di Fourier formale  $S_f$  converge uniformemente a  $f$  in ogni intervallo  $[a, b] \subset ]-\pi, \pi[$ , ma non in tutto  $[-\pi, \pi]$ .

**Esempio 2.** Sia  $g$  l'estensione  $2\pi$ -periodica della funzione  $[-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbf{R} : t \mapsto |t|$ . Questa funzione è pari, quindi può essere rappresentata mediante una serie di soli coseni: essendo

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos kt \, dt = \dots = \begin{cases} \pi & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{per } k = \text{pari} \neq 0 \\ -4/(\pi k^2) & \text{per } k = \text{dispari}, \end{cases} \tag{4.5}$$

si perviene a

$$\begin{aligned} S_g(t) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)t \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos t + \frac{1}{3^2} \cos 3t + \frac{1}{5^2} \cos 5t + \dots \right) \quad \forall t \in ]-\pi, \pi[. \end{aligned} \tag{4.6}$$



Si verifica facilmente che  $g$  è continua su tutto  $\mathbf{R}$  e  $g'$  è continua a tratti. Per il Teorema 3.1 quindi  $g(t) = S_g(t)$  per ogni  $t \in \mathbf{R}$ , e  $S_g$  converge uniformemente in tutto  $\mathbf{R}$ .

Tra l'altro per  $t = \pi$  si ottiene una rappresentazione di  $\pi^2$ :

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

**Esempio 3.** Sia  $h(t) := \tan t$  per ogni  $t \neq \pi/2 + k\pi$  con  $k \in \mathbf{Z}$ . Questa funzione non è continua a tratti, quindi non possiamo applicare il Teorema 3.1.

**Osservazione.** Le funzioni  $f$  e  $g$  degli esempi precedenti coincidono in  $[0, \pi[$ , ed in questo intervallo possono essere rappresentate sia come serie di seni che come serie di coseni.

Questo non contraddice la (4.3), poiché questa *doppia rappresentazione* vale solo su una parte dell'insieme di definizione delle funzioni  $f$  e  $g$ . D'altra parte i coefficienti di Fourier, in quanto integrali, dipendono dal comportamento della funzione in tutto l'intervallo  $[-\pi, \pi[$ . È quindi naturale che due funzioni che coincidono solo in parte dell'insieme di definizione abbiano due diverse rappresentazioni in serie di Fourier formale.

**Spettri.** Sia ora  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$   $2\pi$ -periodica e continua, si definiscano gli  $a_k$  e i  $b_k$  come in (2.6) e (2.7), si ponga  $\rho_0 := a_0/2$  e  $\theta_0 = 0$ . Per ogni  $k \in \mathbf{N}$  siano  $\rho_k \geq 0$  e  $\theta_k \in [0, 2\pi[$  tali che

$$\begin{cases} \rho_k := \sqrt{a_k^2 + b_k^2} & \text{e, se } \rho_k > 0, \\ \cos \theta_k = \frac{a_k}{\rho_k}, \quad \sin \theta_k = -\frac{b_k}{\rho_k} \end{cases} \quad \forall k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}; \quad (4.7)$$

per  $k = 0$  si pone  $\rho_0 = a_0/2$ . I  $\theta_k$  sono univocamente determinati se  $\rho_k > 0$ ; se invece  $\rho_k = 0$  si prende un qualsiasi valore per  $\theta_k$ .

Si può allora riscrivere la serie (2.1) nella forma equivalente

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \cos(kt + \theta_k) \quad \forall t \in \mathbf{R}; \quad (4.8)$$

In teoria dei segnali i numeri  $\rho_k$  e  $\theta_k$  sono rispettivamente detti *ampiezza* e *fase* della frequenza  $k$ -esima del segnale  $f$ ; le corrispondenti successioni  $\{\rho_k\}$  e  $\{\theta_k\}$  sono rispettivamente dette *spettro di ampiezza* e *spettro di fase*. Poiché  $\cos \alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$  per ogni  $\alpha \in \mathbf{R}$ , ponendo  $\tilde{\theta}_k := \theta_k + \pi/2$  la (4.8) è anche equivalente a

$$S_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \sin(kt + \tilde{\theta}_k) \quad \forall t \in \mathbf{R}. \quad (4.9)$$

## 5 Rappresentazione Esponenziale delle Serie di Fourier

Abbiamo esaminato le serie di Fourier formali per funzioni a valori reali; nulla impedisce di estendere quegli sviluppi a funzioni a valori complessi, dal momento che grazie alla linearità la trasformazione  $f \mapsto (\{a_k(f)\}, \{b_k(f)\})$  può essere applicata sia alla parte reale che a quella immaginaria. In tal modo si ottiene una rappresentazione della forma (2.1), ma con spettro complesso, esso pure dato

dalle formule (2.6) e (2.7). In questo paragrafo studieremo una diversa rappresentazione che si applica alle funzioni a valori complessi periodiche (anche qui assumendo che il periodo sia  $2\pi$  per comodità).

Una serie trigonometrica

$$S(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad (5.1)$$

può essere espressa equivalentemente mediante esponenziali complessi, poiché grazie alle formule di Eulero

$$\cos kt = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}, \quad \sin kt = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Ponendo  $c_k := \frac{1}{2}[a_{|k|} - i \operatorname{sign}(k)b_{|k|}]$  per ogni  $k \in \mathbf{Z}$ , ovvero

$$c_0 := \frac{a_0}{2}, \quad c_k := \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} := \frac{a_k + ib_k}{2} \quad \forall k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad (5.2)$$

la (5.1) fornisce

$$S(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt} \quad \forall t \in \mathbf{R}. \quad (5.3)$$

Quest'ultima è detta *serie trigonometrica in forma esponenziale*.

Al pari delle successioni dei coefficienti  $\{(a_k, b_k)\}$ , pure la successione doppia  $\{c_k\}$  è denominata lo spettro del segnale  $f$  (analogamente a quanto si vedrà per la trasformazione di Fourier).<sup>10</sup>

In questo caso le relazioni di ortogonalità (2.2), (2.3) e (2.4) assumono una forma particolarmente semplice:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-i\ell t} dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq \ell \\ 2\pi & \text{se } k = \ell \end{cases} \quad \forall k, \ell \in \mathbf{Z}; \quad (5.4)$$

grazie a queste relazioni, il procedimento di calcolo utilizzato per ricavare le (2.6) e (2.7) fornisce

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad \forall k \in \mathbf{Z}. \quad (5.5)$$

Le formule (5.2) e le loro inverse

$$\begin{cases} a_k = c_k + c_{-k} & \text{per } k = 0, 1, 2, \dots, \\ b_k = i(c_k - c_{-k}) & \text{per } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.6)$$

permettono di passare agevolmente dalla rappresentazione delle serie trigonometriche in termini di seni e coseni a quella esponenziale e viceversa.

**Osservazione.** Sia  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\{c_k \in \mathbf{C}\}_{|k| \leq n}$ , e si ponga  $P_n(x, y) := \sum_{k=0}^n [c_k(x + iy)^k + c_{-k}(x - iy)^k]$  per ogni  $x, y \in \mathbf{R}$ . Questo è un polinomio algebrico di grado  $n$ . Inoltre

$$S_n(t) := \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ikt} = P_n(\cos t, \sin t). \quad (5.7)$$

<sup>10</sup> A volte si dice che le successioni  $\{a_k\}, \{b_k\}$  costituiscono lo *spettro reale*, mentre la  $\{c_k\}$  è lo *spettro complesso*. È vero che se  $f$  è reale allora  $\{a_k(f)\}$  e  $\{b_k(f)\}$  sono reali, mentre  $\{c_k(f)\}$  possono essere complessi. Comunque questa terminologia è un po' fuorviante, poiché nulla vieta di usare la rappresentazione in termini di seni e coseni anche per funzioni a valori complessi, ottenendo quindi coefficienti  $\{a_k\}$  e  $\{b_k\}$  complessi.

(Se  $S_n$  è a valori reali, i coefficienti del polinomio  $P$  possono essere supposti reali.)

Questo giustifica la denominazione di *polinomio trigonometrico* per  $S_n$ , sia per la rappresentazione in termini delle funzioni trigonometriche  $\cos kt$  e  $\sin kt$ , che per quella in termini degli esponenziali complessi  $e^{ikt}$ .

**Valore Principale.** Resta da definire la somma della *serie doppia*  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt}$  ( $= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ ). Occorre scegliere tra due alternative:

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n c_k e^{ikt} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} e^{-ikt} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad (5.8)$$

oppure

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} \quad \forall t \in \mathbf{R}. \quad (5.9)$$

In questo caso quest'ultima è la definizione corretta: è detta somma della serie doppia nel senso del *valore principale*, ed è anche indicata con V.P.  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt}$ .

Si noti che la convergenza di due serie numeriche  $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k$  e  $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{-k}$  implica quella della corrispondente serie doppia nel senso del valore principale (V.P.):

$$\text{V.P.} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \alpha_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \alpha_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{-k},$$

ma non sempre vale il viceversa. Un semplice controesempio è ottenuto ponendo  $\alpha_k := k$  per ogni  $k \in \mathbf{Z}$ ; infatti

$$\text{V.P.} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \alpha_k = 0, \quad \text{mentre} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} k = +\infty, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} (-k) = -\infty;$$

in questo caso l'espressione  $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{-k}$  non ha senso, poiché corrisponde alla forma indeterminata  $(+\infty) + (-\infty)$ .<sup>11</sup>

Nel seguito intenderemo sempre la somma delle serie doppie nel senso del valore principale, ed ometteremo di scrivere "V.P.". <sup>12</sup>

<sup>11</sup> Per le serie a termini positivi le due nozioni di convergenza sono equivalenti. (Non lo dimostriamo, però è chiaro che in tal caso sono escluse *compensazioni* come nel controesempio). Lo stesso vale per le serie assolutamente convergenti.

<sup>12</sup> Una definizione analoga può essere introdotta a proposito degli integrali di funzioni limitate su insiemi illimitati o di funzioni illimitate su insiemi limitati. Ad esempio gli integrali  $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$  e  $\int_{-1}^{+1} 1/t dt$  non esistono, né come integrali di Riemann generalizzati né come integrali di Lebesgue. Tuttavia si possono definire gli *integrali nel senso del valor principale*:

$$\begin{aligned} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} t dt &:= \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{-m}^m t dt (= 0), \\ \text{V.P.} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{t} dt &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{+1} \frac{1}{t} dt \right) (= 0). \end{aligned}$$

Si noti la stretta analogia tra integrali impropri e serie.

Mediante le formula di trasformazione (5.2) e (5.6), è facile verificare che intendere la serie trigonometrica  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt}$  nel senso del valore principale equivale a scrivere la corrispondente serie in forma di seni e coseni come

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad \text{piuttosto che} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt.$$

(Ovviamente sarebbe più restrittivo richiedere la convergenza di entrambe queste due ultime serie, piuttosto che quella della loro somma.)

**Funzioni Pari e Dispari.** Denotando con  $c$  la funzione  $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C} : k \mapsto c_k$  e con  $i\mathbf{R}$  l'insieme dei numeri immaginari, si verifica facilmente che

$$\begin{aligned} f \text{ pari} & \Leftrightarrow c_{-k} = c_k & \forall k \in \mathbf{Z}, \\ f \text{ dispari} & \Leftrightarrow c_{-k} = -c_k & \forall k \in \mathbf{Z}, \\ f(t) \in \mathbf{R} \quad \forall t & \Leftrightarrow c_{-k} = c_k^* & \forall k \in \mathbf{Z}, \\ f(t) \in i\mathbf{R} \quad \forall t & \Leftrightarrow c_{-k} = -c_k^* & \forall k \in \mathbf{Z}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

(La verifica di questa e di analoghe proprietà elementari è lasciata come esercizio.) Quest'ultima equivalenza discende dalla precedente, osservando che, denotando con  $\tilde{c}_k$  i coefficienti di Fourier di  $\tilde{f}$ ,

$$\tilde{f} = if \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{c}_k = ic_k \quad \forall k \in \mathbf{Z}. \tag{5.11}$$

Denotando con  $c$  la successione doppia  $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C} : k \mapsto c_k$ , la (5.10) può essere letta come segue:

$$\begin{aligned} f \text{ pari} & \Leftrightarrow c \text{ è pari}, \\ f \text{ dispari} & \Leftrightarrow c \text{ è dispari}, \\ f(t) \in \mathbf{R} \quad \forall t & \Leftrightarrow \text{Re}(c) \text{ è pari, Im}(c) \text{ è dispari}, \\ f(t) \in i\mathbf{R} \quad \forall t & \Leftrightarrow \text{Re}(c) \text{ è dispari, Im}(c) \text{ è pari}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Incidentalmente si noti anche che, se  $f$  è sviluppabile in serie di Fourier formale, allora

$$f(t) \in \mathbf{R} \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad f(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \text{Re}(c_k e^{ikt}) \quad \forall t. \tag{5.13}$$

Il passaggio dalla funzione  $f$  alle successioni dei coefficienti di Fourier  $\{(a_k, b_k)\}$  o  $\{c_k\}$  è interpretato come un processo di *analisi*; l'operazione inversa che porta dai coefficienti di Fourier alla funzione  $f$  è interpretato come *sintesi*.

**Rappresentazione Esponenziale Alternativa.** In analogia con la (4.8), si noti che per ogni  $k \in \mathbf{Z}$ ,

$$c_k = r_k e^{i\varphi_k} \quad \text{per } r_k \geq 0 \text{ e } \varphi_k \in \mathbf{R} \text{ opportuni;}$$

i numeri  $r_k$  e  $e^{i\varphi_k}$  sono rispettivamente detti *ampiezza* e *fasore*. Pertanto

$$S_f(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} r_k e^{i(kt + \varphi_k)} \quad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{5.14}$$

**Osservazione.** Disponiamo quindi di quattro rappresentazioni per lo sviluppo in serie di Fourier formale di una funzione  $2\pi$ -periodica:

(i) due rappresentazioni in termini di seni e coseni per  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ :

$$S_f^{(1)}(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (a_k, b_k \in \mathbf{R}), \quad (5.15)$$

$$S_f^{(2)}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \cos(kt + \theta_k) \quad (\rho_k, \theta_k \in \mathbf{R}); \quad (5.16)$$

(ii) due rappresentazioni in forma esponenziale per  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ :

$$S_f^{(3)}(t) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt} \quad (c_k \in \mathbf{C}), \quad (5.17)$$

$$S_f^{(4)}(t) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} r_k e^{i(kt + \varphi_k)} \quad r_k \in \mathbf{R}^+, \varphi_k \in \mathbf{R}. \quad (5.18)$$

La rappresentazione esponenziale è più semplice di quella in termini di seni e coseni ed il suo uso conduce a conti più agevoli. Nel caso di funzioni a valori reali la rappresentazione in termini di seni e coseni comunque consente di sviluppare la trattazione in ambito reale.

**Confronto tra le rappresentazioni spettrali alternative.** Come abbiamo visto, questi sviluppi in serie sono equivalenti: si passa da uno all'altro mediante semplici formule di trasformazione lineari dei coefficienti di Fourier (siano essi reali o complessi). I coefficienti  $a_k, b_k, c_k$  degli sviluppi di Fourier (5.15) e (5.17) dipendono linearmente dalla funzione  $f$ ; questo invece non vale per i coefficienti  $\rho_k, \theta_k, r_k, \varphi_k$  delle rappresentazioni (5.16) e (5.18), che sono ricavati dagli  $a_k, b_k, c_k$  mediante trasformazioni non lineari. Questo può rendere più conveniente la rappresentazione dello spettro in termini di  $a_k, b_k, c_k$  piuttosto che  $\rho_k, \theta_k, r_k, \varphi_k$ .

**Funzioni con Periodo Diverso da  $2\pi$ .** Se  $f$  è periodica di periodo  $T \neq 2\pi$ , allora  $\tilde{f}(\tau) := f(T\tau/2\pi)$  è una funzione  $2\pi$ -periodica. Partendo dallo sviluppo in serie trigonometrica

$$S_{\tilde{f}}(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau) \quad \forall \tau \in \mathbf{R},$$

mediante la trasformazione di variabile  $\tau \mapsto t := T\tau/(2\pi)$  si ha

$$S_f(t) = S_{\tilde{f}}\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2k\pi}{T}t + b_k \sin \frac{2k\pi}{T}t \right) \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

con

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\tau) \cos k\tau \, d\tau = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2k\pi}{T}t \, dt & \text{per } k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\tau) \sin k\tau \, d\tau = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{2k\pi}{T}t \, dt & \text{per } k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Pertanto tutti i risultati precedenti si estendono facilmente a  $S_f$ . Analogamente

$$S_f(t) = S_{\tilde{f}}\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{2\pi ikt/T} \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

con

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\tau) e^{-ik\tau} d\tau = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2\pi ikt/T} dt \quad \forall k \in \mathbf{Z}. \quad (5.19)$$

**Esercizi.** (i) Assuming that a function  $f$  has a Fourier expansion in the interval  $] -\pi, \pi[$ , complete these sentences in terms of the sequences  $\{a_k\}, \{b_k\}$ :

$$\begin{aligned} f \text{ real and even} & \Leftrightarrow \dots \\ f \text{ real and odd} & \Leftrightarrow \dots \\ f \text{ imaginary and even} & \Leftrightarrow \dots \\ f \text{ imaginary and odd} & \Leftrightarrow \dots \end{aligned} \quad (5.20)$$

(ii) Assuming that a function  $f$  has a Fourier expansion in the interval  $] -\pi, \pi[$ , complete the sentences (5.20) in terms of the sequence  $\{c_k\}$ .

## 6 Serie di Fourier in $L^2$

Finora abbiamo trattato la teoria delle serie di Fourier per funzioni continue, o continue a tratti. Adesso illustriamo la teoria negli spazi funzionali  $L^p$ .

Incominciamo da un risultato molto semplice.

**Proposizione 6.1.** *Sia  $p \in [1, +\infty]$ . Per ogni successione di coefficienti  $c = \{c_k\} \in \ell^1$ , la corrispondente serie di Fourier  $S_c = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt}$  converge uniformemente ad una funzione continua. Inoltre l'operatore  $\ell^1 \rightarrow C^0([-\pi, \pi]) : c \mapsto S_c$  è continuo. [Ex]*

Sappiamo che lo spazio di funzioni  $L^2(-\pi, \pi)$  e lo spazio di successioni  $\ell^2$  sono entrambi dotati di prodotto scalare:

$$(f, g)_{L^2} := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [g(t)^*] dt \quad \forall f, g \in L^2(-\pi, \pi), \quad (6.1)$$

$$(\{c_k\}, \{d_k\})_{\ell^2} := \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k d_k^* \quad \forall \{c_k\}, \{d_k\} \in \ell^2. \quad (6.2)$$

Per le funzioni di  $L^2(-\pi, \pi)$  ha senso scrivere le formule dei coefficienti di Fourier, poiché  $L^2(-\pi, \pi) \subset L^1(-\pi, \pi)$ .

**Teorema 6.2.** *Ogni funzione  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  è sviluppabile in serie di Fourier. Più precisamente, definiti i coefficienti  $\{a_k\}, \{b_k\}, \{c_k\}$  come in (2.6), (2.7) e (5.5), abbiamo*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad (6.3)$$

nel senso della convergenza in  $L^2(-\pi, \pi)$ . Ovvero, per  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{aligned} \left\| f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right\|_{L^2} & \rightarrow 0, \\ \left\| f(t) - \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ikt} \right\|_{L^2} & \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Si noti che in generale la convergenza in  $L^2(-\pi, \pi)$  implica la convergenza quasi dappertutto di una opportuna sottosuccessione, ma non di tutta la successione.<sup>13</sup>

Formule analoghe valgono per le rappresentazioni (5.16) e (5.18).

**Dimostrazione.** Il teorema si basa sulla teoria delle serie di Fourier astratte negli spazi di Hilbert.

(Grazie al teorema di Weierstrass-Stone,) si può dimostrare che la famiglia  $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbf{Z}}$  è una base ortogonale di  $L^2(-\pi, \pi)$ . Per ogni  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ ,  $\{c_k(f) = (f, e^{ikt})_{L^2}\}_{k \in \mathbf{Z}}$  è la famiglia dei suoi coefficienti di Fourier in  $L^2(-\pi, \pi)$ . Questo significa esattamente quanto affermato nella tesi.  $\square$

Vediamo ora che l'operazione che trasforma una funzione di  $L^2(-\pi, \pi)$  nei suoi coefficienti di Fourier stabilisce una corrispondenza particolarmente interessante tra gli spazi di Hilbert  $L^2(-\pi, \pi)$  e  $\ell^2$ .

**Teorema 6.3.** (di Parseval) Siano  $f, \tilde{f} \in L^2(-\pi, \pi)$ , e siano

$$S_f(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad (6.5)$$

$$S_{\tilde{f}}(t) := \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{a}_k \cos kt + \tilde{b}_k \sin kt) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{c}_k e^{ikt} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad (6.6)$$

i rispettivi sviluppi in serie di Fourier (nel senso della convergenza in  $L^2(-\pi, \pi)$ ). Allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \tilde{f}(t)^* dt = \frac{\pi}{2} a_0 \tilde{a}_0^* + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \tilde{a}_k^* + b_k \tilde{b}_k^*) = 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \tilde{c}_k^* \quad (\in \mathbf{C}), \quad (6.7)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} |c_k|^2 \quad (\in \mathbf{R}^+). \quad (6.8)$$

Pertanto

$$|c_k| \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty \quad (\text{disuguaglianza di Bessel}), \quad (6.9)$$

Il quadrato della norma in  $L^2(-\pi, \pi)$  di un segnale ne rappresenta la potenza (ovvero, energia per l'unità di tempo). Pertanto la (6.8) esprime l'uguaglianza tra la potenza del segnale periodico  $f$  e la somma delle potenze delle sue componenti armoniche.

**Dimostrazione.** Per verificare la prima uguaglianza di (6.7), basta scrivere  $f(t) \tilde{f}(t)^*$  in termini dei coefficienti di Fourier  $\{a_k\}$ ,  $\{b_k\}$ , sviluppare il prodotto, quindi integrare ed usare le proprietà di ortogonalità (2.2)–(2.4). Analogamente grazie alla (5.4)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \tilde{f}(t)^* dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt} \right) \left( \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} \tilde{c}_\ell^* e^{-i\ell t} \right) dt \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} c_k \tilde{c}_\ell^* \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\ell)t} dt = 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \tilde{c}_k^* = 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} |c_k|^2. \end{aligned}$$

Ancora una volta abbiamo scambiato le operazioni di serie e di integrale; in  $L^2(-\pi, \pi)$  questo è del tutto lecito. Infine ponendo  $\tilde{f} = f$  nella (6.7) si ottiene la (6.8).

In altri termini: per i polinomi trigonometrici il risultato è di verifica immediata; le corrispondenti serie convergono per via dell'appartenenza delle rispettive successioni allo spazio  $L^2(-\pi, \pi)$  o  $\ell^2$ .  $\square$

<sup>13</sup> Comunque, per via del suddato risultato di Carleson del 1966, la serie di Fourier di ogni funzione di  $L^2(-\pi, \pi)$  converge per quasi ogni  $t \in ]-\pi, \pi[$ .

**Corollario 6.4.** *La trasformazione  $T$  che manda  $f$  nel suo spettro  $\{c_k\}$  è un isomorfismo isometrico tra gli spazi di Hilbert  $L^2(-\pi, \pi)$  e  $\ell^2$ .*

Il prossimo risultato lega l'operazione di derivazione delle funzioni (derivabili) periodiche e l'espansione in serie di Fourier. Questo è uno dei principali risultati di questa teoria, per altro già ricca.

**Teorema 6.5.** *Sia  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  e sia (6.3) il suo sviluppo in serie di Fourier formale. Se esiste  $f' \in L^2(-\pi, \pi)$ ,<sup>14</sup> allora pure  $f'$  è sviluppabile in serie di Fourier in questo spazio, e*

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k(-a_k \sin kt + b_k \cos kt) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} ikc_k e^{ikt} \quad \forall t \in \mathbf{R}. \quad (6.10)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (|a_k|^2 + |b_k|^2) = 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} k^2 |c_k|^2 (< +\infty). \quad (6.11)$$

Analogamente, per ogni intero  $n \geq 1$ , se  $f, \dots, f^{(n)} \in L^2(-\pi, \pi)$ ,<sup>15</sup> allora<sup>16</sup>

$$f^{(n)}(t) = \dots = \sum_{k \in \mathbf{Z}} (ik)^n c_k e^{ikt} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad (6.12)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(n)}(t)|^2 dt = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} k^{2n} |c_k|^2 (< +\infty). \quad (6.13)$$

Pertanto, affinché esista la derivata  $n$ -esima, quanto più alto è l'ordine  $n$  di derivazione, tanto più rapidamente lo spettro deve convergere a zero all'infinito (ovvero per  $k \rightarrow +\infty$  nel caso di  $\{a_k\}$  e  $\{b_k\}$ ; per  $k \rightarrow \pm\infty$  nel caso dei  $\{c_k\}$ ). E viceversa.

**Osservazione.** In particolare, se  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} k |c_k|^2$  allora  $f, f' \in L^2(-\pi, \pi)$ . Questo implica che  $f$  sia assolutamente continua. (Tra l'altro  $f(-\pi) = f(\pi)$ , poiché in effetti  $t$  varia lungo la circonferenza...)

**Serie di Fourier astratte.** In ogni spazio di Hilbert (separabile)  $H$  si definiscono le *serie di Fourier astratte*. Queste consistono nella rappresentazione di ogni  $u \in H$  nella forma  $u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$  (nel senso della convergenza in  $H$ , ovviamente); qui  $\{u_k\}$  è una base ortonormale di  $H$ , e  $a_k = (u, u_k)_H$  for ogni  $k$ . Se poi  $H = L^2(-\pi, \pi)$  e  $\{u_k\}$  è la famiglia delle funzioni trigonometriche (normalizzate), allora ritroviamo la serie di Fourier classica.

## 7 Method of Variable Separation for PDEs

The theory of Fourier series is at the basis of the classical *method of separation of variables* for the solution of PDEs (= partial differential equations) — more specifically, of certain PDEs with constant coefficients in domains with special symmetries (e.g., a Cartesian product of intervals).

<sup>14</sup> ovvero, se  $f$  è assolutamente continua e  $f'$  è un elemento di  $L^2(-\pi, \pi)$ .

<sup>15</sup> ovvero, se  $f, \dots, f^{(n-1)}$  sono assolutamente continue e  $f, \dots, f^{(n)}$  sono elementi di  $L^2(-\pi, \pi)$ .

<sup>16</sup> Omettiamo la formula della derivata  $n$ -esima della serie di Fourier formale in forma in termini di seni e coseni perché richiederebbe una distinzione dei diversi valori di  $n$ , in quanto la derivazione trasforma seni in coseni e viceversa. È invece molto agevole derivare la serie di Fourier formale in forma esponenziale, poiché la derivata di un esponenziale è un esponenziale: questo è uno dei vari vantaggi offerti da tale rappresentazione.



For instance, let us consider the following boundary-value problem for the Laplace equation:

$$\begin{aligned} D_x^2 u + D_y^2 u &= 0 && \text{in } ]0, \pi[ \times ]0, \pi[, \\ u(0, y) &= 0, && u(\pi, y) = 0 && \forall y \in ]0, \pi[, \\ u(x, 0) &= 0, && u(x, \pi) = g(x) && \forall x \in ]0, \pi[, \end{aligned} \quad (7.1)$$

for a prescribed function  $g \in C^0([0, \pi])$ .

Let us first look for real-valued solutions of the PDE of the form  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ . Assuming that  $u(x, y) \neq 0$  for any  $(x, y)$ , we get

$$0 = \frac{D_x^2 u + D_y^2 u}{u} = \frac{X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)}{X(x)Y(y)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad \forall (x, y). \quad (7.2)$$

As  $X''(x)/X(x)$  ( $Y''(y)/Y(y)$ , resp.) does not depend on  $y$  ( $x$ , resp.), we infer that

$$\exists C \in \mathbf{R} : \quad -\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = C \quad \forall (x, y), \quad (7.3)$$

that is, the following system of two ODEs (= ordinary differential equations):

$$X''(x) = -CX(x) \quad \forall x \in ]0, \pi[, \quad Y''(y) = CY(y) \quad \forall y \in ]0, \pi[. \quad (7.4)$$

We know that the general solution of the first equation is of the form

$$X(x) = a \cos \sqrt{C}x + b \sin \sqrt{C}x \quad \forall x \in ]0, \pi[ \quad (a, b \in \mathbf{R}). \quad (7.5)$$

Because of (7.1)<sub>2</sub>, we assume the boundary conditions

$$X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0, \quad (7.6)$$

whence

$$a = 0, \quad b \sin \sqrt{C}\pi = 0. \quad (7.7)$$

If  $b = 0$ , then  $X(x) \equiv 0$ , whence  $u(x, y) \equiv 0$ ; this solution is of no interest. In order to get a nontrivial solution we need  $\sin \sqrt{C}\pi = 0$ ; this holds iff  $C > 0$  and  $\sqrt{C} \in \mathbf{N}$ . We thus have the linearly independent family  $\{X_k\}$  of solutions, with

$$X_k(x) = \sin kx \quad \forall x \in ]0, \pi[, \forall k \in \mathbf{N}. \quad (7.8)$$

For  $C = k^2$  ( $\in \mathbf{N}$ ), the other ODE of (7.4) reads

$$Y''(y) - k^2 Y(y) = 0, \quad (7.9)$$

which has the general solution

$$Y(y) = a \cos iky + b \sin iky \quad \forall y \in ]0, \pi[ \quad (a, b \in \mathbf{R}), \quad (7.10)$$

or equivalently,

$$Y(y) = \tilde{a} \cosh ky + \tilde{b} \sinh ky \quad \forall y \in ]0, \pi[ \quad (\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbf{R}). \quad (7.11)$$

By prescribing the boundary condition  $Y(0) = 0$ , we get  $\tilde{a} = 0$ ; this yields the following linearly independent family  $\{Y_k\}$  of solutions:

$$Y_k(y) = \sinh ky \quad \forall x \in ]0, \pi[, \forall k \in \mathbf{N}. \quad (7.12)$$

(The reader will notice that for the moment we are not prescribing any condition on  $Y$  for  $y = \pi$ .)

In conclusion, the linearly independent functions

$$u_k(x, y) = X_k(x)Y_k(y) = \sin kx \sinh ky \quad \forall (x, y) \in ]0, \pi[^2 \quad (k \in \mathbf{N}) \quad (7.13)$$

fulfill the system

$$\begin{aligned} D_x^2 u_k + D_y^2 u_k &= 0 && \text{in } ]0, \pi[ \times ]0, \pi[, \\ u_k(0, y) &= 0, && u_k(\pi, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[, \\ u_k(x, 0) &= 0 && \forall x \in ]0, \pi[. \end{aligned} \quad (7.14)$$

At least formally, for any sequence  $\{c_k\}$  in  $\mathbf{R}$ , the same then holds for the formal series

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx \sinh ky \quad \forall (x, y) \in ]0, \pi[^2. \quad (7.15)$$

If this series of functions converges, then it solves the boundary-value problem (7.1) iff  $u(x, \pi) = g(x)$  for any  $x \in ]0, \pi[$ . Setting  $\hat{c}_k = c_k \sinh k\pi$  for any  $k$ , this reads

$$\sum_{k=1}^{\infty} \hat{c}_k \sin kx = g(x) \quad \forall x \in ]0, \pi[. \quad (7.16)$$

The  $\hat{c}_k$ s are thus the Fourier coefficients of  $g$ , provided that this function can be represented as a Fourier series of sines. This holds for the odd extension to  $] - \pi, \pi[$  of any sufficiently regular  $g : ]0, \pi[ \rightarrow \mathbf{R}$ .

It is easily established that the solution of the problem (7.17) is unique.

**Other Boundary Conditions I.** The method of separation of variables may also be applied to other boundary conditions. For instance, let us consider the following problem:

$$\begin{aligned} D_x^2 u + D_y^2 u &= 0 && \text{in } ]0, \pi[ \times ]0, \pi[, \\ u(0, y) &= 0, && D_x u(\pi, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[, \\ u(x, 0) &= 0, && u(x, \pi) = g(x) \quad \forall x \in ]0, \pi[, \end{aligned} \quad (7.17)$$

again for a prescribed function  $g \in C^0([0, \pi])$ .

One proceeds as above, searching for solutions of the PDE of the form  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ . In this case the function  $X$  is assumed to solve the following problem

$$X''(x) = -CX(x), \quad X(0) = 0, \quad X'(\pi) = 0. \quad (7.18)$$

If  $C = (k + 1/2)^2$  for some  $k \in \mathbf{N}$ , this problem has the following linearly independent family  $\{X_k\}$  of solutions

$$X_k(x) = \sin[(k + \frac{1}{2})x] \quad \forall x \in ]0, \pi[, \forall k \in \mathbf{N}. \quad (7.19)$$

Proceeding as above, we see that the linearly independent functions

$$u_k(x, y) = \sin[(k + \frac{1}{2})x] \sinh[(k + \frac{1}{2})y] \quad \forall (x, y) \in ]0, \pi[^2 \quad (k \in \mathbf{N}) \quad (7.20)$$

fulfill the system

$$\begin{aligned} D_x^2 u_k + D_y^2 u_k &= 0 && \text{in } ]0, \pi[ \times ]0, \pi[, \\ u_k(0, y) &= 0, && D_x u_k(\pi, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[, \\ u_k(x, 0) &= 0 && \forall x \in ]0, \pi[. \end{aligned} \quad (7.21)$$

The general solution of this system thus reads

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin[(k + \frac{1}{2})x] \sinh[(k + \frac{1}{2})y] \quad \forall (x, y) \in ]0, \pi[^2. \quad (7.22)$$

This function solves the boundary-value problem (7.17) iff  $u(x, \pi) = g(x)$  for any  $x \in ]0, \pi[$ , and so on.

Now notice that, setting  $t = x/2$ , we have

$$\widetilde{X}_k(t) := X_k(2t) = \sin[(2k + 1)t] \quad \forall t \in ]0, \pi/2[, \forall k \in \mathbf{N}. \quad (7.23)$$

We thus get all the odd terms of the sin series. For any  $k \in \mathbf{N}$ , the  $2\pi$ -periodic extension  $f$  of the function  $\widetilde{X}_k$  has two properties:

$$(i) \ f \text{ is odd,} \quad (ii) \ t \mapsto f(t - \pi/2) \text{ is even.} \quad (7.24)$$

The Fourier coefficients  $\{c_k\}$  may thus be determined in terms of those of  $g$  as above, after that  $g$  has been extended to a  $2\pi$ -periodic function that fulfills the properties (i) and (ii).

The solution of the problem (7.17) is unique.

*Exercise.* What is the solution of problem (7.21) if the condition “ $u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in ]0, \pi[$ ” is replaced by “ $D_y u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in ]0, \pi[$ ”?

**Other Boundary Conditions II.** Let us next consider the following problem:

$$\begin{aligned} D_x^2 u + D_y^2 u &= 0 && \text{in } ]0, \pi[ \times ]0, \pi[, \\ D_x u(0, y) &= 0, && D_x u(\pi, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[, \\ u(x, 0) &= 0, && u(x, \pi) = g(x) \quad \forall x \in ]0, \pi[, \end{aligned} \quad (7.25)$$

again for a prescribed function  $g \in C^0([0, \pi])$ .

One proceeds as above, and assumes that the function  $X$  solves the problem

$$X''(x) = -CX(x), \quad X'(0) = 0, \quad X'(\pi) = 0. \quad (7.26)$$

If  $\sqrt{C} = k \in \mathbf{N}$ , this problem has the following linearly independent family  $\{X_k\}$  of solutions

$$X_k(x) = \cos kx \quad \forall x \in ]0, \pi[, \forall k \in \mathbf{N}. \quad (7.27)$$

Proceeding as above, we get that the linearly independent functions

$$u_k(x, y) = \cos kx \sinh ky \quad \forall (x, y) \in ]0, \pi[^2 \quad (k \in \mathbf{N}) \quad (7.28)$$

fulfill the system

$$\begin{aligned} D_x^2 u_k + D_y^2 u_k &= 0 && \text{in } ]0, \pi[ \times ]0, \pi[, \\ D_x u_k(0, y) &= 0, && D_x u_k(\pi, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[, \\ u_k(x, 0) &= 0 && \forall x \in ]0, \pi[. \end{aligned} \tag{7.29}$$

The general solution thus reads

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos kx \sinh ky \quad \forall (x, y) \in ]0, \pi[^2. \tag{7.30}$$

This function solves the boundary-value problem (7.25) iff  $u(x, \pi) = g(x)$  for any  $x \in ]0, \pi[$ , and so on. The Fourier coefficients  $\{c_k\}$  are determined by those of  $g$  as above.

The solution of the problem (7.25) is unique.

*Exercise.* What is the solution of problem (7.25) if the condition “ $u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in ]0, \pi[$ ” is replaced by “ $D_y u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in ]0, \pi[$ ” ?

**Other PDEs.** The method of separation of variables may also be applied to other boundary-value problems for PDEs, again with constant coefficients and set in special domains. Here we indicate some examples, in which  $y$  typically represents time. For all of these problems the solution  $u$  is unique.

1. Cauchy-Dirichlet problem for the wave equation:

$$\begin{aligned} D_x^2 u - D_y^2 u &= 0 && \text{in } ]0, \pi[ \times ]0, \pi[, \\ u(0, y) &= 0, && u(\pi, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[, \\ u(x, 0) &= 0, && D_y u(x, 0) = g(x) \quad \forall x \in ]0, \pi[, \end{aligned} \tag{7.31}$$

for a prescribed function  $g \in C^0([0, \pi])$ .

The method of separation of variables provides the following general solution for the PDE coupled with the first three boundary conditions:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx \sin ky \quad \forall (x, y) \in ]0, \pi[^2. \tag{7.32}$$

This function solves the problem (7.31) iff it fulfills the fourth boundary condition  $D_y u(x, 0) = g(x)$  for any  $x \in ]0, \pi[$ . The Fourier coefficients  $\{c_k\}$  may be determined in terms of those of  $g$  as above.

*Exercises.* (i) What is the solution of problem (7.31) if the condition “ $u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in ]0, \pi[$ ” is replaced by “ $D_y u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in ]0, \pi[$ ” ?

(ii) What is the solution if in (7.31) the condition “ $u(0, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[$ ” is replaced by “ $D_x u(0, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[$ ” ?

(iii) What is the solution if in (7.31) the conditions “ $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$  for  $y \in ]0, \pi[$ ” are replaced by “ $D_x u(0, y) = D_x u(\pi, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[$ ” ?

2. Cauchy-Dirichlet problem for the heat equation

$$\begin{aligned} D_x^2 u - D_y u &= 0 && \text{in } ]0, \pi[ \times ]0, \pi[, \\ u(0, y) &= 0, && u(\pi, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[, \\ u(x, 0) &= g(x) && \forall x \in ]0, \pi[, \end{aligned} \tag{7.33}$$

for a prescribed function  $g \in C^0([0, \pi])$ .

The method of separation of variables provides the following general solution for the PDE coupled with the first two boundary conditions:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 y} \sin kx \quad \forall (x, y) \in ]0, \pi[^2. \quad (7.34)$$

This function solves the boundary-value problem (7.33) iff  $u(x, 0) = g(x)$  for any  $x \in ]0, \pi[$ . The Fourier coefficients  $\{c_k\}$  may be determined in terms of those of  $g$  as above.

*Exercises.* (i) What is the solution of problem (7.33) if the condition “ $u(0, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[$ ” is replaced by “ $D_x u(0, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[$ ” ?

(ii) What is the solution if in (7.33) the conditions “ $u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[$ ” are replaced by “ $D_x u(0, y) = D_x u(\pi, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[$ ” ?

(iii) May the above method be extended if the PDE “ $D_x^2 u - D_y u = 0$ ” is replaced by “ $D_x^2 u + D_y u = 0$ ” ?

### 3. Cauchy-Dirichlet problem for the Schrödinger equation

$$\begin{aligned} D_x^2 u + i D_y u &= 0 && \text{in } ]0, \pi[ \times ]0, \pi[, \\ u(0, y) &= 0, \quad u(\pi, y) = 0 && \forall y \in ]0, \pi[, \\ u(x, 0) &= g(x) && \forall x \in ]0, \pi[, \end{aligned} \quad (7.35)$$

for a prescribed function  $g \in C^0([0, \pi])$ . The method of separation of variables provides the following general solution for the PDE coupled with the first two boundary conditions:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ik^2 y} \sin kx \quad \forall (x, y) \in ]0, \pi[^2. \quad (7.36)$$

This function solves the boundary-value problem (7.35) iff  $u(x, 0) = g(x)$  for any  $x \in ]0, \pi[$ . The Fourier coefficients  $\{c_k\}$  may be determined in terms of those of  $g$  as above.

This result may also be derived by noticing that the Schrödinger equation may be retrieved from the heat equation  $D_x^2 u - D_y u = 0$  by replacing  $y$  by  $-iy$ . The same substitution may then be made in the corresponding solutions.

*Exercises.* (i) What is the solution of problem (7.34) if the condition “ $u(0, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[$ ” is replaced by “ $D_x u(0, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[$ ” ?

(ii) What is the solution if in (7.34) the conditions “ $u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[$ ” are replaced by “ $D_x u(0, y) = D_x u(\pi, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[$ ” ?

## 8 Further Exercises on Variable Separation

**Exercise 1.** Solve the equation  $\Delta u = 0$  on the set  $]0, \pi[^2$ , with the boundary conditions

$$D_x u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \quad \forall y \in ]0, \pi[, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = x \quad \forall x \in ]0, \pi[.$$

**Exercise 2.** Solve the equation  $\Delta u = 0$  on the set  $]0, \pi[^2$ , with the boundary conditions

$$u(0, y) = u(\pi, y), \quad D_x u(0, y) = D_x u(\pi, y) \quad \forall y \in ]0, \pi[, \quad u(x, \pi) = (\sin x) \cos x \quad \forall x \in ]0, \pi[.$$

**Exercise 3.** Solve the equation  $D_{tt}u - D_{xx}u = 0$  on the set  $]0, \pi[ \times \mathbf{R}^+$ , with the boundary and Cauchy conditions

$$u(0, t) = D_x u(\pi, t) = 0 \quad \forall t > 0, \quad u(x, 0) = 1, \quad D_t u(x, 0) = x \quad \forall x \in ]0, \pi[.$$

**Exercise 4.** Solve the equation  $\Delta u = 0$  on the set  $]0, \pi[^2$ , with the boundary conditions

$$u(0, y) = 1, \quad u(\pi, y) = 2 \quad \forall y \in ]0, \pi[, \quad u(x, 0) = 1, \quad u(x, \pi) = x \quad \forall x \in ]0, \pi[.$$

Note: next we see that the method of separation of variables can be extended to some restricted classes of PDEs with variable coefficients.

**Exercise 5.** (i) Use the method of separation of variables to find the real solutions of the equation  $D_{xx}u + D_{yy}u = 0$  in the annulus  $\{(r, \theta) : 1 < r < 2, 0 < \theta < 2\pi\}$ .

(ii) Solve the same problem in the disk  $\{(r, \theta) : 0 \leq r < 1\}$ .

*Hint:* Let us set  $u(x, y) = \tilde{u}(r, \theta)$ . The representation of the Laplacian operator  $\Delta$  in polar coordinates  $(r, \theta)$  reads

$$\Delta u(x, y) = L\tilde{u}(r, \theta), \quad \text{with} \quad L = r^{-1}D_r(rD_r) + r^{-2}D_\theta^2. \quad (8.1)$$

*Solution.* (i) We look for (real) solutions of the form  $u(x, y) = \tilde{u}(r, \theta) = R(r)H(\theta)$ .

The PDE  $\Delta u(x, y) = L\tilde{u}(r, \theta) = 0$  yields  $[r^2R''(r) + rR'(r)]/R = -H''/H = C \in \mathbf{R}$ .

Let us search for  $2\pi$ -periodic solutions of the ODE  $H''(\theta) + CH(\theta) = 0$ . For  $k := \sqrt{C} \in \mathbf{N}$  we get the basis of solutions  $\{\cos k\theta, \sin k\theta : k \in \mathbf{N}\}$ .<sup>17</sup>

The ODE  $[r^2R''(r) + rR'(r)]/R = k^2$  also reads  $r^2R''(r) + rR'(r) - k^2R(r) = 0$ . This second order equation has two independent solutions. Searching for a solution of the form  $R(r) = r^\lambda$  with  $\lambda \in \mathbf{R}$ , we get  $\lambda(\lambda - 1) + \lambda - k^2 = 0$ , that is,  $\lambda^2 = k^2$ , i.e.,  $\lambda = \pm k$  if  $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ . For  $k = 0$  in this way we just get  $R(r) = r^0 = 1$ ;  $R(r) = \log r$  is another independent solution. We thus get the basis  $\{r^k, r^{-k}\}_{k \in \mathbf{N}} \cup \{\log r\}$  for the space of solutions of the ODE in  $R(r)$ .

The general solution of the PDE (8.1) thus reads

$$\tilde{u}(r, \theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) + c \log r \quad (8.2)$$

with  $a_k, b_k, c$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) real constants, or equivalently

$$\tilde{u}(r, \theta) = \sum_{k \in \mathbf{N}} [(r^k a_k + r^{-k} a_{-k}) \cos k\theta + (r^k b_k - r^{-k} b_{-k}) \sin k\theta]. \quad (8.3)$$

(ii) In the case of the disk we must impose the boundedness of  $R$  at the origin. The basis of solutions for  $R(r)$  is thus reduced to  $\{r^k : k \in \mathbf{N}\}$ .

The general solution of the PDE thus reads

$$\tilde{u}(r, \theta) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta). \quad (8.4)$$

---

<sup>17</sup> Here the function  $\sin 0\theta = 0$  must be excluded, since the element of a basis must be linearly independent.

In this case for any harmonic we have just two coefficients, instead of the four of (8.3). On the other hand, here it is in order to prescribe just one boundary datum on the exterior circle, instead of two as for the annulus.

**Exercise 6.** (i) Let us denote by  $(r, \theta)$  the polar coordinates in the plane, and set  $u(x, y) = \tilde{u}(r, \theta)$ . Solve the equation  $D_{xx}u + D_{yy}u = 0$  in the annulus  $\{(r, \theta) : 1 < r < 2\}$  with the boundary conditions  $\tilde{u}(1, \theta) = 0$  and  $\tilde{u}(2, \theta) = \sin \theta$  for any  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

(ii) Solve the same problem, with the boundary conditions  $\tilde{u}(1, \theta) = \cos \theta$  and  $\tilde{u}(2, \theta) = \sin(3\theta)$  for any  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

(iii) Solve the same problem for two generic boundary conditions  $\tilde{u}(1, \theta) = g_1(\theta)$  and  $\tilde{u}(2, \theta) = g_2(\theta)$  for any  $\theta \in [0, 2\pi]$ , with  $g_1, g_2$  representable as Fourier series.

*Solution.* (i) The specific form of the boundary datum suggests us to look for a solution of the form  $u(x, y) = \tilde{u}(r, \theta) = R(r) \sin \theta$ . As  $D_\theta^2 \sin \theta = -\sin \theta$ , we have  $\Delta u(x, y) = L\tilde{u}(r, \theta) = 0$  iff  $r^2 R''(r) + rR'(r) - R(r) = 0$ . This equation has the independent solutions  $R(r) = C_1 r + C_2/r$  for  $1 < r < 2$  (see the previous exercise). Imposing the boundary conditions  $R(1) = 0$  and  $R(2) = 1$ , we get  $R(r) = (2/3)(r - 1/r)$ . Thus  $\tilde{u}(r, \theta) = (2/3)(r - 1/r) \sin \theta$ . The solution  $\tilde{u}$  is unique.

As an alternative, one may use the method of the following part (iii).

(ii) *Outline:* The solution  $\tilde{u}$  may be represented as  $\tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2$ , with  $\tilde{u}_1$  and  $\tilde{u}_2$  solving the PDE and fulfilling the following two sets of boundary conditions:  $\tilde{u}_1(1, \theta) = \cos \theta$ ,  $\tilde{u}_1(2, \theta) = 0$  and  $\tilde{u}_2(1, \theta) = 0$ ,  $\tilde{u}_2(2, \theta) = \sin(3\theta)$  for any  $\theta \in [0, 2\pi]$ . The functions  $\tilde{u}_1$  and  $\tilde{u}_2$  may be determined as above. The solution  $\tilde{u}$  is unique.

As an alternative, one may use the method of the following part (iii).

(iii) As we saw in the Exercise 5, the general solution of the PDE reads  $\tilde{u}(r, \theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) + c \log r$ . Let us set  $g_r(\theta) = \alpha_{r,0}/2 + \sum_{h \in \mathbf{N}} (\alpha_{r,h} \cos h\theta + \beta_{r,h} \sin h\theta)$  for any  $\theta \in [0, 2\pi]$  and  $r = 1, 2$ .

Different harmonics uncouple because of orthogonality: the coefficients must then be identified for each  $k \in \mathbf{Z}$  (independently one from the other). More explicitly, prescribing the boundary conditions, for each  $h \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  we get two systems; each of them consists of two equations for two unknowns:

$$\alpha_{r,h} = r^h a_h + r^{-h} a_{-h} \text{ with } r = 1, 2, \text{ for the two unknowns } a_h \text{ and } a_{-h}, \text{ and}$$

$$\beta_{r,h} = r^h b_h - r^{-h} b_{-h} \text{ with } r = 1, 2, \text{ for the two unknowns } b_h \text{ and } b_{-h}.$$

For  $n = 0$  we get a single system of two equations:

$$\alpha_{r,0}/2 = a_0 + c \log r \text{ with } r = 1, 2, \text{ for the two unknowns } a_0 \text{ and } c.$$

The solution  $\tilde{u}$  is unique.

As an alternative, one may represent the solution  $\tilde{u}$  as  $\tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2$ , and use the method of part (ii).

**Exercise 7.** (i) Let us denote by  $(r, \theta)$  the polar coordinates in the plane, and set  $u(x, y) = \tilde{u}(r, \theta)$ . Solve the equation  $D_{xx}u + D_{yy}u = 0$  in the region  $\{(r, \theta) : r > 1\}$ , with  $\tilde{u}(r, \theta)$  uniformly bounded and with the side condition  $\tilde{u}(1, \theta) = \sin(2\theta)$ .

(ii) Solve the same problem, with the function  $\sin(2\theta)$  replaced by a prescribed  $2\pi$ -periodic real function  $g$ , which is for instance of class  $C^1$ .

*Solution.* (i) Let us look for solutions of the form  $u(x, y) = \tilde{u}(r, \theta) = R(r) \sin 2\theta$ . As  $D_\theta^2 \sin(2\theta) = -4 \sin(2\theta)$ ,  $\Delta u(x, y) = L\tilde{u}(r, \theta) = 0$  iff  $r^2 R''(r) + rR'(r) - 4R(r) = 0$ , that is  $R(r) = C_1 r^2 + C_2/r^2$

for  $r > 1$ . Imposing the boundary conditions  $R(1) = 1$  and  $R(+\infty) = 0$ , we get  $R(r) = 1/r^2$ . We thus get the solution  $\tilde{u}(r, \theta) = (\sin 2\theta)/r^2$ .

The solution  $\tilde{u}$  is unique.

(ii) This part is left to the reader.

**Exercise 8.** Let us denote by  $(r, \theta)$  the polar coordinates in the plane, set  $u(x, y) = \tilde{u}(r, \theta)$ , and prescribe a function  $g \in C^1([0, 2\pi])$  such that  $g(0) = g(\pi)$ . Solve the equation  $D_{xx}u + D_{yy}u = 0$  in the unit disk  $\{(r, \theta) : r < 1\}$  with the boundary condition  $\tilde{u}(1, \theta) = g(\theta)$  for any  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

*Solution.* In the Exercise 5 we saw that the general solution of the PDE is  $\tilde{u}(r, \theta) = a_0/2 + \sum_{k \geq 1} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$ , which in complex exponential form reads  $\tilde{u}(r, \theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k r^{|k|} e^{ik\theta}$ .

The function  $g$  is representable as a Fourier series: let  $\{\hat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt\}_{k \in \mathbf{Z}}$  be its spectrum, so that  $g(\theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \hat{g}_k e^{ik\theta}$  for any  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Thus  $\tilde{u}(1, \cdot) = g$  iff  $c_k = \hat{g}_k$  for any  $k \in \mathbf{Z}$ . In conclusion,

$$\tilde{u}(r, \theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \hat{g}_k r^{|k|} e^{ik\theta} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) r^{|k|} e^{-ik(\theta-t)} dt. \quad (8.5)$$

The solution  $\tilde{u}$  is unique. <sup>18</sup>

**Exercise 9.** Solve the equation  $\Delta u = 0$  in the set  $]0, \pi[^2$ , with the boundary conditions  $u(0, y) = 0$  and  $u(\pi, y) = y$  for  $0 < y < \pi$ ,  $u(x, 0) = 0$  for  $0 < x < \pi$ , and  $u(x, \pi) = g(x)$  for  $0 < x < \pi$ , for a prescribed  $2\pi$ -periodic complex function  $g$ , which is for instance of class  $C^1$ .

*Solution. Outline:* The solution  $u$  may be represented as  $u = u_1 + u_2$ , with  $\Delta u_1 = \Delta u_2 = 0$  in  $]0, \pi[^2$ , and with  $u_1$  and  $u_2$  fulfilling the following two sets of boundary conditions:

$u_1(0, y) = 0$  and  $u_1(\pi, y) = y$  for  $0 < y < \pi$ ,  $u_1(x, 0) = 0$  for  $0 < x < \pi$ ;

$u_2(0, y) = u_2(\pi, y) = 0$  for  $0 < y < \pi$ ,

$u_2(x, 0) = 0$  and  $u_2(x, \pi) = g(x) - u_1(x, \pi)$  for  $0 < x < \pi$ .

For instance, we may take  $u_1(x, y) = xy/\pi$ .

The solution  $u$  is unique, although other choices of  $u_1$  are also admissible and then also of  $u_2$ . (In other terms,  $u$  is unique but several decompositions  $u = u_1 + u_2$  are admissible.)

---

<sup>18</sup> The complex exponential might have been used also for the other exercises. (However it looked more natural to use the real representation, since those boundary data were expressed in terms of the cos-sin basis.)